Német Nemzetiségi Gimnázium és Kollégium

Budapest

# Helyi tanterv

# Matematika

9. nyelvi előkészítő évfolyam

9-12. évfolyam

A középfokú képzés során a matematika tanulása-tanítása tekintetében az egyik legfontosabb feladat a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása, fejlesztése. A 9. évfolyamtól kezdve a spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).

Az 1–4. és 5–8. évfolyamos képzés nevelési-oktatási szakaszait jellemző tanuláshoz és tanításhoz képest a 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. Az új fogalmakat, algoritmusokat, ismereteket viszont továbbra is induktív módon, szemléltetéssel, felfedeztetéssel, tanulói tevékenységekre építve, a valósághoz kapcsolva kell bevezetni.

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztethetők a tanulókkal. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. Néhány tétel bizonyítása azonban elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése. Az új fogalmak megalkotása, az összefüggések, stratégiák felfedezése és az ismereteknek feladatok, problémák megoldása során történő tudatos alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a meglévő ismeretek mobilizálásának képességét, valamint a problémamegoldó gondolkodás eltérő típusainak adekvát használatát. Ennek a folyamatnak az eredményeképpen a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni. A matematika tanulásának-tanításának egyik fő célja, hogy fejlődjön a tanuló mérlegelő gondolkodása, az adatok elemzését, szintézisét és értékelését lehetővé tevő készségek és képességek rendszere. A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát.

Ebben a nevelési-oktatási szakaszban az ismert számok köre az irracionális számokkal bővül, valamint új műveletek bevezetésére és már ismert műveletek alaphalmazának bővítésére kerül sor a permanenciaelv alapján. Ezen folyamat során a tanuló egyre inkább képes lesz rá, hogy változatos matematikai objektumokat jelölő szimbólumokkal végezzen műveleteket.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. Ehhez – több más fogalom mellett – szükséges a függvény fogalmának változatos (nemcsak számhalmazokon értelmezett) példák mentén történő kiterjesztése.

A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni. A tanuló különböző forrásokat (tankönyv, függvénytáblázat, saját jegyzet, digitális források) használhat az órákon és a számonkérések alkalmával, bizonyos tételek, azonosságok, képletek felidézésére.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Ebben az életkorban is érvényesülnie kell a tanuló érdeklődésének, adottságának, absztrakciós szintjének megfelelő differenciálásnak. Ez a differenciálás jelentheti a Nat-ban leírt tananyagtartalmaknak a lehetőségekhez igazított bővítését is.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon

kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

A matematika tantárgy a Nemzeti alaptantervben rögzített kulcskompetenciákat az alábbi módon fejleszti:

**A tanulás kompetenciái:** A matematika tanulása során elengedhetetlen a tananyag alapos és átfogó megértése. A szöveges feladatok megoldása fejleszti az értő olvasás és a releváns információk kiválasztásának készségét. Az általánosítás és az analógiák adekvát használata, több szempont egyidejű figyelembevétele, a rendszerezési képesség, a megszerzett tudás új helyzetekben való alkalmazása elősegítik az aktív, önirányított tanulás kompetenciáinak kialakítását, fenntartását, megerősítését. A matematika tantárgy a matematikai logika és az algoritmikus gondolkodás fejlesztésével, az ok-okozati összefüggések megláttatásával hozzájárul a többi tantárgy tanulásához szükséges rendszerező, összefüggéseket felismerő, ezáltal hatékony önálló tanulási módszerek elsajátításához és megfelelő alkalmazásához is.

**A kommunikációs kompetenciák:** A matematika fejleszti a tanuló azon képességét, hogy világosan, röviden és pontosan fejezze ki gondolatait. A matematika tanulása során fokozatosan alakul ki a tanuló érvelési és vitakészsége. A szöveges problémák megoldása javítja a szöveg megértésének készségét: a tanulónak meg kell keresnie az információkat és fel kell ismernie egy adott információ jelentőségét a probléma megoldása során. A matematika tanulási folyamatában kialakul a különböző módon (szöveg, grafikon, táblázat, diagram és képlet) bemutatott tartalmak megértésének és alkotásának készségrendszere.

**A digitális kompetenciák:** A matematika tanulása során hangsúlyos szerepet kap a problémamegoldás és az algoritmikus gondolkodás, melyek elősegítik a tanuló digitális kompetenciáinak fejlesztését. A különböző matematikai tárgyú szoftverek, alkalmazások, applikációk és játékok alkalmazásán keresztül a matematika tanulása hozzájárul a tanuló digitális kultúrájának kialakításához.

**A matematikai, gondolkodási kompetenciák:** A matematika tanulása során a tanuló gondolkodásának fejlesztése elsősorban konkrét problémák megoldásán keresztül történik. A tanuló előzetes tudása és tapasztalata alapján azonosítja a problémákat, majd ismert matematikai fogalmakra támaszkodva stratégiát dolgoz ki ezek megoldására. Elfogadja, hogy a megoldás több különböző úton is elképzelhető, illetve találkozik olyan nyitott problémákkal is, amelyeknek több megoldása is lehetséges. Kellő kitartással próbál ki különböző matematikai módszereket, és felismeri azokat a problémákat is, amelyeknek nincs megoldása.

A tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése többek között a feladatok megoldása során kapott eredmények elemzésén és értékelésén keresztül történik. A tanuló megtanul induktív úton példákat általánosítani és deduktív érvelést használni a matematikai állítások bizonyítására.

**A személyes és társas kapcsolati kompetenciák:** A matematika tanulása fejleszti a kitartás, a pontosság, a figyelem és a fegyelmezettség képességét. A matematika tanulásán keresztül erősödik a tanuló felelősségtudata, gazdagodik az önképe, fejlődik a kooperációs készsége. A tanuló matematikai ismereteit alkalmazni tudja az egyéni célok eléréséhez szükséges tervezésben, az életét befolyásoló döntései megalapozásában és meghozatalában, a várható következmények mérlegelésében. A matematika tanulása elősegíti annak belátását, hogy a személyes erősségekre építeni, a hibákból pedig tanulni lehet.

A tanuló a matematikai foglalkozások során megtanulja, hogyan oszthatja meg ötleteit másokkal, és hogyan segítheti társait a matematikai fogalmak megértése vagy azok alkalmazása során. Felelősséget vállal a közösen kitűzött feladatok elvégzéséért, s megtanulja tisztelni mások álláspontját, gondolkodásmódját.

**A kreativitás, a kreatív alkotás, önkifejezés és kulturális tudatosság kompetenciái:** A matematika olyan tudomány, amely összeköti a különböző kultúrákat. A tanuló megismeri a gondolkodás logikai

felépítésének eleganciáját, a matematikának a természethez, a művészetekhez és az épített környezethez fűződő viszonyát.
A tanuló konkrét vagy képi reprezentációval vagy szimbolikus modellekkel végzi a matematikai gondolatok vagy kapcsolatok feltárását, majd új kapcsolatokat alakít ki a matematikai fogalmak között.
**Munkavállalói, innovációs és vállalkozói kompetenciák:** A kompetencia fejlesztése valódi adatok felhasználásával összeállított mindennapi problémák megoldásán keresztül történik. Ennek során a különböző megoldási lehetőségek keresése fejleszti a gondolkodás rugalmasságát és az új ötletek megalkotásának képességét. A tanuló megfelelő játékokon keresztül képessé válik a különböző kockázatok felmérésére, a számára kedvezőnek tűnő stratégia kidolgozására, és megtapasztalja döntései következményét. A matematikai projektekben való részvétel segíti a későbbi munkavállalás szempontjából fontos készségek kialakulását (kreativitás, problémamegoldás, kezdeményezőkészség, másokkal való együttműködés készsége).

| | **A tantárgy heti óraszáma** | **A tantárgy éves óraszáma** |
|---|---|---|
| **9/Ny** | 3 | 108 |
| **9. évfolyam** | 3 | 108 |
| **10. évfolyam** | 3 | 108 |
| **11. évfolyam** | 3 | 108 |
| **12. évfolyam** | 4 | 128 |

**Nevelési alapelvek a matematika tantárgyban**

A nyelvi előkészítő év általánosan megfogalmazott cél és feladatrendszerére építve kiemeljük a legfontosabb pedagógiai alapelveket, melynek megvalósítását mindig szem előtt kívánjuk tartani:

- **nemzetiségük iránt aktívan elkötelezett értelmiségiek nevelése**
- helyes **önismeretre** nevelés,
- az együttműködési képesség és az egészséges **versenyszellem** kialakítása,
- a munka, az **erőfeszítés** megbecsülése
- a kezdeményezőkészség,
- a személyiség maximális tisztelete
- a játék személyiségformáló erejének erősítése
- a kommunikációs készség sokoldalú fejlesztése
- az **absztrakt gondolkodás** képességének **fejlesztése**
- **korszerű** társadalom- és természettudományos ismeretek megalapozása
- alkotó **gondolkodásra** és gondolkodva **cselekvésre** nevelés
- **színvonalas**, következetes oktatás

- kiemelt feladat **a tanulás tanulása**

# 9/Ny évfolyam

**Az előkészítő év céljai szaktárgyunk szempontjából:**

A programba bekapcsolódó tanulók **elvégezték az általános iskola 8 osztályát**, de nagyon eltérő tudásszinttel érkeznek. Az inhomogén osztály lehetőséget biztosít arra, hogy a tanulók egymást segítsék a haladásban.

A program elvei alapján az előkészítő év végére alkalmasaknak kell lenniük a középiskolai tanulmányok **minőségi elsajátítására**. Tehát az általános iskolai matematika tananyag újratanítása helyett a képességfejlesztésen van a hangsúly, de alapos ismétlésre is szükség van.

**Továbblépés**

A diákokat a fenti alapelvek bázisán kívánjuk képezni. Az előkészítő évet arra kívánjuk szaktárgyunkban fordítani, hogy a tanulók matematikai képességeiről, gondolkodási módszereiről mind a diákok, mind a szülők, mind pedig tanáraik számára világos legyen, hogy a matematika tantárgy tanulásában mit kell a 9. évfolyamtól kezdve felvállalni.

**Az előkészítő év TANTERVI konstrukciója** figyelembe veszi a kerettanterv valamennyi követelményét.

Igyekeztünk kellő időt biztosítani az elméleti anyag átismétlésére is, de a pedagógus által fontosnak tartott, a tanulócsoport, az egyén igényeihez igazodó foglalkozásra (gyakorlásra, az anyag elmélyítésére vagy bővítésére) is.

Egyaránt fontosnak tartjuk a helyes számfogalom, műveletfogalom kialakítását (megerősítését), a számolási készség fejlesztését (és megfelelő számonkérését) és a logikus, rugalmas gondolkodásra nevelést.

A tantervben is nagy szerepet kap a **tapasztalatokra épülő matematika oktatás, az irányított felfedeztetés**, az induktív módszer. Ugyanakkor fontos a tapasztalatok által megszerzett ismereteknek az életkornak megfelelő pontossággal történő megfogalmazása, tudása, s a matematikán belül, illetve más tantárgyakban való alkalmazási készsége.

Fontosnak tartjuk a rugalmas, fegyelmezett gondolkodásra nevelést, az igényes problémamegoldást.

**Cél**

A tanterv legfontosabb célja a kerettantervben megfogalmazottaknak megfelelően a rugalmas, fegyelmezett gondolkodásra nevelés, a kreativitás fejlesztése. Fontos cél és pozitív motivációs eszköz annak megmutatása, hogy a matematika a kultúrtörténet része, hogy a matematikai ismeretek lehetővé teszik a világ jobb megismerését. A matematikai ismeretek alkalmazása, s a

megfelelően fejlett gondolkodás biztosítja több tantárgy megfelelő szintű megértését, tanulását. A tantárgyban való elmélyülés vagy lemaradás igen komolyan motiválja a pályaválasztást.

Az előkészítő év legfontosabb célja a matematikai ismeretek biztosabb alapra helyezése, a pályaválasztás már látható irányainak kijelölése, az egyéni célok, feladatok megfogalmazásai.

A tantervben fontos cél a **tevékenységekkel megérlelt fogalmak kialakítása**, majd pontos tudása, az ismeretek összetett alkalmazása, az életkornak megfelelő matematikai nyelv egyre pontosabb használata.

A leírtak érdekében a gondolkodási módszereknek a matematika minden témakörében folyamatosan kell szerepelniük.

**Követelmény**

- Az emelt szintű általános iskolai tananyag biztos tudása

- Az ismeretek pontosítása, rendszerezése, összefoglalása és feladatmegoldással a megfelelő szintű érettségi eredményes letételére való felkészítés, és ezen felül a sikeres felsőfokú tanulmányok előkészítése.

**Értékelés**

- A tanulók tanórai munkájának folyamatos értékelése, a házi feladatok ellenőrzése, rövidebb írásbeli és szóbeli számonkérés.

- A tanórai munkán túlmutató tevékenységek is értékelésre kerülnek: kiselőadások történeti összefüggésekről, modellkészítések, tantárgyi integráció kérdési, szakköri munka, versenyeredmények.

**A témakörök áttekintő táblázata:**

| Témakör neve | óraszám |
|---|---|
| Halmazok | 10 |
| Matematikai logika | 10 |
| Számhalmazok, műveletek | 8 |
| Hatvány | 10 |
| Betűs kifejezések (alkalmazás egyenletmegoldás, függvényábrázolás során) | 10 |
| Számelméleti ismeretek | 6 |
| Arányosság, százalékszámítás | 12 |
| A függvény fogalma, függvénytulajdonságok | 16 |
| Geometriai alapismeretek | 8 |
| Háromszögek-1 | 8 |
| Négyszögek, sokszögek | 10 |
| **Összes óraszám:** | 108 |

## TÉMAKÖR: Halmazok

### JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott halmazt diszjunkt részhalmazaira bont, osztályoz;
- halmazokat különböző módokon megad;
- halmazokkal műveleteket végez, azokat ábrázolja és értelmezi.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Halmaz közös elem nélküli részhalmazokra bontása, példák ennek alkalmazására a matematikán belül, más tantárgyaknál és a mindennapi életben
- Halmaz megadása utasítással, elemek felsorolásával
- Alaphalmaz és komplementer halmaz. Annak tudatosítása, hogy alaphalmaz nélkül nincs komplementer halmaz
- Halmazok közötti viszonyok ábrázolása, értelmezése
- Halmazok metszetének, uniójának, különbségének, komplementerének képzése, ábrázolása és értelmezése
- Két-három halmaz elemszámával kapcsolatos feladatok megoldása logikai szita segítségével
- Távolsággal megadott ponthalmazok, adott tulajdonságú ponthalmazok
- Szemléletes kép végtelen halmazokról

#### FOGALMAK:

alaphalmaz, részhalmaz, üres halmaz, halmazok egyenlősége, Venn-diagram; halmazműveletek: unió, metszet, különbség, komplementer halmaz; diszjunkt halmazok, halmaz elemszáma, logikai szita

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Hétköznapi életből, más tantárgyakból vagy a matematikából vett, konkrétan vagy digitálisan megjelenített alaphalmazból megadott tulajdonságokkal rendelkező elemek válogatása
- Konkrét részhalmaz esetén a részhalmaz képzési szempontjainak megállapítása
- A történelem, a művészetek, a tudományok, a sport neves személyiségeinek kitalálása különböző tulajdonságok alapján
- Barkochba játék
- A „végtelen szálloda” mint modell
- Megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazok elemei között egyértelmű hozzárendelés felfedeztetése, például a pozitív természetes számok halmazának számossága megegyezik a pozitív páros számok halmazának számosságával

## TÉMAKÖR: Matematikai logika

### JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott állításról eldönti, hogy igaz vagy hamis;
- alkalmazza a tagadás műveletét egyszerű feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az „és”, a (megengedő és kizáró) „vagy” logikai jelentését;
- megfogalmazza adott állítás megfordítását;
- helyesen használja a „minden” és „van olyan” kifejezéseket.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- A matematikai bizonyítás fogalma
- Állítás logikai értékének megállapítása (igaz vagy hamis)
- Állítás tagadásának alkalmazása egyszerű feladatokban
- A „nem”, az „és”, a megengedő „vagy” és a kizáró „vagy” logikai jelentésének ismerete és alkalmazása matematikai és matematikán kívüli feladatokban
- A „minden” és a „van olyan” típusú állítások logikai értékének megállapítása és ennek indoklása egyszerű esetekben
- Adott állítás megfordításának megfogalmazása
- „Ha…, akkor…” és „akkor és csak akkor” típusú egyszerű állítások logikai értékének megállapítása
- Stratégiai és logikai játékok

### Fogalmak

tétel, bizonyítás, igaz-hamis; „nem”, „és”, „vagy”, „vagy…, vagy…”, „ha…, akkor…”, „akkor és csak akkor”

### Javasolt tevékenységek

- „Bírósági tárgyalás”, ahol az osztály tanulói a védők és a vádlók egy állítás indoklására, cáfolására
- „Mit állít a szigetlakó?”, „Ki volt a tettes, ha...?” típusú feladatok eljátszása, megoldása csoportmunkában
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
- Stratégiai játékok, például egyszerű NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

## Témakör: Számhalmazok, műveletek

**Javasolt óraszám: 8 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- a kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás műveleti azonosságokat helyesen alkalmazza különböző számolási helyzetekben;
- racionális számokat tizedes tört és közönséges tört alakban is felír;
- ismeri a valós számok és a számegyenes kapcsolatát;

- ismeri és alkalmazza az abszolút érték, az ellentett és a reciprok fogalmát;
- a számolással kapott eredményeket nagyságrendileg megbecsüli, és így ellenőrzi az eredményt;
- valós számok közelítő alakjaival számol, és megfelelően kerekít.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- A megismert számhalmazok: természetes számok, egész számok, racionális számok.
- Valós számok halmaza.
- Műveleti azonosságok (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás), zárójelek helyes használata
- Tizedes törtek átírása közönséges tört alakba és viszont
- Irracionális számok szemléltetése
- Racionális számok elhelyezkedése számegyenesen
- Nyílt és zárt intervallumok fogalmának ismerete és alkalmazása
- Számok abszolút értékének, ellentettjének és reciprokának meghatározása
- Számológéppel elvégzett számítások eredményének előzetes becslése és nagyságrendi ellenőrzése
- Valós számok adott jegyre kerekítése
- Valós számok gyakorlati helyzetekben történő észszerű kerekítése

### Fogalmak

racionális szám, irracionális szám, valós szám, nyílt intervallum, zárt intervallum, abszolút érték, ellentett, reciprok

### Javasolt tevékenységek

- A számológép helyes használatának elsajátítása, például műveleti sorrend, zárójelek
- Írásban elvégzett műveletek ellenőrzése számológéppel
- Célszám megközelítése adott számjegyekkel, műveleti jelek és zárójelek használatával
- Tanulói kiselőadás a helyi értékes számírás kialakulásáról, a számjegyek kialakulásának történetéről
- A tanteremben vagy a tanterem környezetében végzett mérések esetén a megfelelő kerekítés alkalmazása
- Adott mérés elvégzése esetén a mérési hiba következményeinek vizsgálata

## Témakör: Hatvány

**Javasolt óraszám: 10 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza az egész és a racionális kitevőjű és a hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az egész kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- ismeri és alkalmazza a normálalak fogalmát.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Valós számok hatványozása pozitív egész kitevőre
- Hatványozás 0 és negatív egész kitevőre, a permanencia-elv

- A hatványozás azonosságainak megfigyelése, felfedezése
- A hatványozás azonosságainak bizonyítása konkrét alapszám és tetszőleges pozitív egész kitevő esetén
- Számok normálalakja
- Számolás normálalak segítségével

### FOGALMAK

hatványalap, hatványkitevő, normálalak

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Projektmunka: hányszor lehet félbehajtani egy nagyméretű papírt? Keresés az interneten, kísérlet végzése például egy teljes guriga vécépapírral
- Internetes forrásból származó, nagyon kicsi vagy nagyon nagy számokat tartalmazó cikkek valóságtartalmának megállapítása páros vagy csoportmunkában

## TÉMAKÖR: Betűs kifejezések (alkalmazás egyenletmegoldásnál, függvényábrázolás során)

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- műveleteket végez algebrai kifejezésekkel;
- ismer és alkalmaz egyszerű algebrai azonosságokat;
- átalakít algebrai kifejezéseket összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Műveletek egyszerű algebrai kifejezésekkel: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, egytagú kifejezések hatványa
- Fordítás az algebra nyelvére
- Kifejezések helyettesítési értéke
- Műveleti azonosságok ismerete és alkalmazása egyenletek megoldása során
- Az $(a + b)^2$, az $(a - b)^2$ és az $(a + b)(a - b)$ kifejezésekre vonatkozó nevezetes azonosságok ismerete és alkalmazása (például oszthatósági feladatokban, egyenletek megoldásában, függvények ábrázolásában)
- Egyszerű másodfokú polinom átalakítása teljes négyzetté kiegészítéssel
- Algebrai kifejezések átalakítása összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával

### FOGALMAK

összeg, tag, szorzat, tényező, egynemű kifejezés, együttható, teljes négyzet, polinom

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Gondolj egy számra, és én kitalálom” játék, matematikai bűvésztrükkök algebrai magyarázata
- Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek geometriai modellezése
- A nevezetes azonosságok geometriai megjelenítése
- Számolási „trükkök” a nevezetes azonosságok segítségével, például kétjegyű számok négyzetének, $99 \cdot 101$ típusú szorzat eredményének kiszámolása fejben

## TÉMAKÖR: Számelméleti ismeretek

### JAVASOLT ÓRASZÁM: 6 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;
- összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
- meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat;

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényezős felbontásból
- Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása

### FOGALMAK

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímek

## TÉMAKÖR: Arányosság, százalékszámítás

### JAVASOLT ÓRASZÁM: 12 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az egyenes és a fordított arányosságot.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az egyenes és a fordított arányosság fogalmának ismerete és alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
- Az egyenes és a fordított arányosság grafikonjának felismerése és elkészítése
- Példák az egyenes és a fordított arányosságtól különböző arányosságokra (négyzetes, gyökös)
- Példák egy irányban vagy ellentétes irányban változó mennyiségpárokra a mindennapi életből
- Százalékszámítással kapcsolatos hétköznapi helyzetekhez (például háztartási bevételekhez, kiadásokhoz, pénzügyi fogalmakhoz, gazdasági folyamatokhoz) és más tantárgyakhoz köthető feladatok megoldása

### FOGALMAK

egyenes arányosság, fordított arányosság, százalékalap, százalékérték, százalékláb

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Összetett, valódi élethelyzetekkel kapcsolatos feladatok megoldása csoportmunkában, szükség esetén grafikon segítségével
- Háztartási számlák elemzése az azokon megjelenő egységárak és fizetendő összegek figyelembevételével

## TÉMAKÖR: A függvény fogalma, függvénytulajdonságok

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 16 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékkészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- megad hétköznapi életben előforduló hozzárendeléseket;
- adott képlet alapján helyettesítési értékeket számol, és azokat táblázatba rendezi;
- táblázattal megadott függvény összetartozó értékeit ábrázolja koordináta-rendszerben;
- a grafikonról megállapítja függvények alapvető tulajdonságait.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hétköznapi hozzárendelések megfigyelése, tulajdonságainak megfogalmazása: egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű
- Függvény megadása, alapvető függvénytani fogalmak ismerete
- Függvényértékek meghatározása és táblázatba rendezése
- Függvények ábrázolása táblázat alapján
- Függvények alkalmazása valós, hétköznapi helyzetek jellemzésére, gyakorlati problémák megoldására
- A grafikon alapján a függvény értelmezési tartományának, értékkészletének, minimumának, maximumának és zérushelyének megállapítása, a növekedés és fogyás leolvasása
- Lineáris függvény, másodfokú függvény, abszolútérték függvény, , fordított arányosságot leíró függvény (elemi függvények) grafikonja, tulajdonságai
- Elemi függvényekkel egyszerű függvénytranszformációs lépések végrehajtása: $f(x) + c$, $f(x + c)$, $c \cdot f(x)$, $|f(x)|$
- Lineáris függvények hozzárendelési utasításának leolvasása grafikon alapján
- Egyszerű függvények esetén az $f(x) = c$ alapján $x$ meghatározása és ennek alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
- Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés megfordítása és a megfordított hozzárendelés ábrázolása

### FOGALMAK

egyértelmű hozzárendelés, kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékkészlet, helyettesítési érték, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Összetett, valódi helyzetekkel, például demográfiai kérdésekkel, pénzügyi feladatokkal kapcsolatos grafikonok elemzése csoportmunkában
- Hétköznapi helyzetekben időben változó folyamatokkal kapcsolatos mérések végzése és a mért adatok ábrázolása koordináta-rendszerben (például hőmérséklet)
- A tanulók mindennapi életéhez kapcsolódó grafikonok ábrázolása és elemzése (például út-idő grafikon az iskolába való eljutásról)
- Egyszerű, másodfokú függvénnyel jellemezhető, gyakorlati helyzethez köthető szélsőérték-feladatok megoldása csoportmunkában, például adott hosszúságú spárgával bekeríthető maximális területű téglalap adatainak mérése, megfigyelése
- Függvények ábrázolása digitális eszköz segítségével

- Barkochba játék a függvényekkel kapcsolatos fogalmak használatával
- Szöveges feladatok megoldása grafikus úton
- Algebrai úton nem vagy nehezen megoldható egyenletek közelítő megoldása grafikus úton digitális eszköz segítségével

## TÉMAKÖR: Geometriai alapismeretek

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 8 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és használja a pont, egyenes, sík (térelemek) és szög fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a nevezetes szögpárok tulajdonságait;
- ismeri az alapszerkesztéseket, és ezeket végre tudja hajtani hagyományos vagy digitális eszközzel.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Két pont, pont és egyenes, két egyenes távolságának alkalmazása a síkban
- Egyenesek kölcsönös helyzetének ismerete és alkalmazása
- Nevezetes szögpárok tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcsszögek, egyállású szögek, váltószögek
- A szakaszfelező merőleges és a szögfelező mint ponthalmazok tulajdonságainak ismerete
- Dinamikus geometriai szoftver alkalmazásának előkészítése, használata
- Alapszerkesztések végrehajtása hagyományos vagy digitális eszközzel euklideszi módon: szakaszfelező merőleges, szögfelező, merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése, szög másolása

### FOGALMAK

pont, egyenes, sík, szögtartomány, hajlásszög, párhuzamos, merőleges, pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcsszögek, egyállású szögek, váltószögek, szakaszfelező merőleges, szögfelező

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Az osztályteremben vagy a terem környezetében „egyenesek” kölcsönös helyzetének megadása, ezek távolságának megmérése
- Számszerű adatként csak a méretarányt tartalmazó térkép alapján valódi távolságok meghatározása, becslése
- Számszerű adatként csak méretarányt tartalmazó térképen adott helységektől (közelítőleg) egyenlő távolságra levő helységek megkeresése

## TÉMAKÖR: Háromszögek-1

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 8 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;

- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- kiszámítja háromszögek területét.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti kapcsolatokat; a speciális háromszögek tulajdonságait;
- ismeri és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A háromszögek csoportosítása oldalak és szögek szerint
- Az alapvető összefüggések ismerete és alkalmazása háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között
- Speciális háromszögek tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: szabályos, egyenlő szárú, derékszögű háromszög
- A Pitagorasz-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- A Pitagorasz-tétel bizonyítása
- Háromszög területének kiszámítása

### FOGALMAK

szabályos háromszög, egyenlő szárú háromszög, derékszögű háromszög,

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Konkrét alakzatok átdarabolása más alakzattá páros vagy csoportmunkában
- A derékszögű háromszög oldalaira szerkesztett négyzetek átdarabolása a Pitagorasz-tételnek megfelelő módon, pitagoraszi tangramok vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával

## TÉMAKÖR: Négyszögek, sokszögek

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a szabályos sokszög fogalmát; kiszámítja a konvex sokszög belső és külső szögeinek összegét.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Speciális négyszögek (trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) tulajdonságainak ismerete, területének kiszámítása
- Konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételek ismerete, bizonyítása és alkalmazása
- Szabályos sokszög fogalmának ismerete

- Szabályos sokszög területe átdarabolással

### FOGALMAK

trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet, konvex sokszög, szabályos sokszög

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Különböző típusú speciális négyszögek területének meghatározására vonatkozó formula felfedeztetése átdarabolással
- A belső és a külső szögösszegre vonatkozó tételek felfedeztetése, illusztrálása átdarabolással, hajtogatással vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- Projektmunka: lakás/iskola alaprajzának elkészítése méretarányosan

# 9–10. évfolyam

A 9–10. évfolyamon a korábbi képzési szakaszok során megszerzett ismeretekre és kialakított készségekre, képességekre alapozva – a spirális tananyagfelépítést szem előtt tartva – az egyes témakörök új ismeretei matematikai szempontból egyre pontosabb és elvontabb formában jelennek meg a tanulási-tanítási folyamat során. Egyre határozottabb a fogalmak pontos definiálásának, az állítások, tételek indoklásának, bizonyításának, valamint az általánosításnak az igénye. Erre a szakaszra fokozottan jellemző a korábbi és az új ismeretek egységes rendszerbe foglalása, az egyes témakörökön belüli rendszerezés.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló – a lehetőségekhez mérten – a tanár által irányított módon, feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok fejlesztik a matematikai kommunikációt. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést és a felfedeztetést.

A 9–10. évfolyamon megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Ebben a szakaszban jelennek meg először a valós számok; elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek; a függvény fogalma, függvénytulajdonságok; a kör és részei. Vannak olyan témakörök, amelyek megjelennek más területek tanítása során is, ezért a tananyag egyes részeihez javasolt óraszámok nem feltétlenül jelentenek időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése lehetővé teszi a hétköznapi vagy matematikai nyelven megfogalmazott problémák és a megoldás során alkalmazott matematikai modellek körének bővülését.

## 9. évfolyam

**A témakörök áttekintő táblázata:**

| Témakör neve | Javasolt óraszám |
|---|---|
| Kombinatorika, gráfok | 12 |
| Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek | 40 |
| Háromszögek-2 | 13 |
| A kör és részei | 10 |
| Transzformációk, szerkesztések (9/10) | 23 |
| Leíró statisztika | 10 |
| **Összes óraszám:** | 108 |

## TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok

### JAVASOLT ÓRASZÁM: 12 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- megold egyszerű sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hétköznapi helyzetekhez kapcsolódó sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezéssel
- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása matematikai problémákban
- Esetszétválasztás és szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában
- Összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában
- Gráfok alkalmazása konkrét hétköznapi és matematikai szituációk szemléltetésére, feladatok megoldására

### FOGALMAK

gráf, gráf csúcsa, gráf éle

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezett leszámlálással és a szorzási és/vagy esetszétválasztási elv alkalmazásával
- Geometriai eszközök használata kombinatorikai problémák megoldására
- Néhány feltételt tartalmazó tanulói órarend készítése kis elemszámmal
- Azonos modellen alapuló, de különböző megfogalmazású feladatok megoldása
- Szorzat vagy összeg alakban megadott eredményű kombinatorikafeladatokhoz saját szöveg írása
- Téves megoldású kombinatorikafeladatokban a hiba megtalálása és a tévedés kijavítása
- Sorba rendezési feladatok megoldásának szemléltetése gráffal
- Adott gráfhoz hozzáillő feladatszöveg alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában
- tartalmazó cikkek valóságtartalmának megállapítása páros vagy csoportmunkában

## TÉMAKÖR: Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

### JAVASOLT ÓRASZÁM: 40 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;

- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a következő egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, szorzattá alakítás;
- megold elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket, elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Elsőfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
- Alaphalmaz, megoldáshalmaz fogalmának ismerete
- Egyismeretlenes elsőfokú egyenlet és egyenlőtlenség megoldása mérlegelvvel és grafikusan
- Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása behelyettesítéssel, közös együtthatók módszerével, grafikusan
- Elsőfokú egyenlettel, egyenlőtlenséggel, egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok megoldása (például út-idő-sebesség, közös munkavégzés, keveréses feladatok, pénzügyi és gazdasági tematikájú feladatok)

### FOGALMAK

alaphalmaz, megoldáshalmaz, mérlegelv

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Szöveges feladatok megoldása több különböző úton, a különböző megoldások összehasonlítása előnyök és hátrányok szempontjából
- Hiányos, túlhatározott, illetve ellentmondó adatokat tartalmazó problémák vizsgálata
- Nyílt végű problémák megoldása
- Adott egyenlethez szöveges feladat alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában
- Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek grafikus megoldása során; a digitális eszközzel történő ábrázolás előnyeinek és hátrányainak megbeszélése

## TÉMAKÖR: Háromszögek-2

### JAVASOLT ÓRASZÁM: 13 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;

- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- kiszámítja háromszögek területét.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmakat és tételeket;

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmak, tételek ismerete és alkalmazása: oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör
- Az oldalfelező merőlegesek és a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása
- Háromszög területének kiszámítása

### FOGALMAK

oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt kör, beírt kör

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételek felfedeztetése szerkesztéssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával, páros vagy csoportmunkában

## TÉMAKÖR: A kör és részei

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ki tudja számolni a kör és részeinek kerületét, területét;
- ismeri a kör érintőjének fogalmát, kapcsolatát az érintési pontba húzott sugárral;
- ismeri és alkalmazza a Thalész-tételt és megfordítását.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával, ívmérték fogalma
- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körcikk területével
- Kör, körcikk, körgyűrű és körszelet területének és kerületének kiszámítása
- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak
- A Thalész-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- A Thalész-tétel bizonyítása

### FOGALMAK

középponti szög, körív, szög ívmértéke, körcikk, körgyűrű, körszelet, érintőszakaszok

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Annak felfedeztetése méréssel, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával; különböző méretű körök esetén a kapott adatok táblázatba foglalása
- A Thalész-tétel felfedeztetése szerkesztéssel, szögméréssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával

## TÉMAKÖR: Transzformációk, szerkesztések-1

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 23 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismer példákat geometriai transzformációkra;
- ismeri és alkalmazza a síkbeli egybevágósági transzformációkat és tulajdonságaikat; alakzatok egybevágóságát;
- megszerkeszti egy alakzat tengelyes, illetve középpontos tükörképét, pont körüli elforgatottját, párhuzamos eltoltját hagyományosan és digitális eszközzel;
- geometriai szerkesztési feladatoknál vizsgálja és megállapítja a szerkeszthetőség feltételeit.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Példák ismerete geometriai hozzárendelésekre (merőleges vetítés, párhuzamos vetítés, merőleges affinitás, térkép, fényképezés)
- A tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás ismerete, tulajdonságaik
- A vektor fogalmának kialakítása a párhuzamos eltolás segítségével
- Egybevágósági transzformációk egymás utáni végrehajtása
- Egybevágósági transzformációk végrehajtása szerkesztéssel vagy digitális eszközzel
- Egybevágó alakzatok, szimmetriák megfigyelése a környezetben, művészeti alkotásokban
- Az egybevágósági transzformációk alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
- Háromszögek egybevágóságának alapesetei és ezek alkalmazása
- Négyszögek egybevágósága
- Egyszerű szerkesztési feladatok megoldása hagyományos vagy digitális eszközzel; diszkusszió
- Gyakorlati feladatok megoldása egybevágóságok segítségével (például a sík parkettázása különféle síkidomokkal; szabásminta készítése, használata)

### FOGALMAK

tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás, párhuzamos eltolás, egybevágóság, forgásszög, vektor, vektorok összege,

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Gyakorlati példák keresése geometriai hozzárendelésekre, például fényképezés, filmvetítés

- A középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás bemutatása mint két tengelyes tükrözés egymásutánja
- M. C. Escher és Victor Vasarely néhány interneten is elérhető alkotásának elemzése a szimmetriák szempontjából; hasonló módszerrel képek alkotása
- A sík parkettázása egybevágó háromszögekkel, négyszögekkel papírsablonok vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- A tengelyes vagy középpontos szimmetriára alapozó stratégiai játékok (például pénzforgatós, színezős) páros munkában

## TÉMAKÖR: Leíró statisztika

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adatsokaságból adott szempont szerint oszlop- és kördiagramot készít hagyományos és digitális eszközzel.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Statisztikai adatok gyűjtésének tervezése
- Statisztikai adatok gyűjtése hagyományos és internetes forrásból
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése középértékekkel hagyományos és digitális eszközzel
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, egyszerű statisztikai következtetések
- Oszlop- és kördiagram értelmezése, valamint készítése hagyományos és digitális eszközzel
- Konkrét adatsokaság ábrázolásához, statisztikai kérdés megválaszolásához a megfelelő diagramtípus kiválasztása
- Kördiagramból oszlopdiagram készítése és viszont
- Grafikus manipulációk felismerése és javítása diagramok esetén

### FOGALMAK

oszlopdiagram, kördiagram, átlag, medián, módusz

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Adatgyűjtés megtervezése, például forgalomszámlálás vagy iskolai felmérés előkészítése
- A megtervezett statisztikai adatgyűjtés lebonyolítása, az eredmények szemléltetése grafikonok segítségével, a kapott eredmények értékelő bemutatása tanulói kiselőadás formájában
- Különböző adatsokaságok esetében annak vizsgálata, hogy ezek jellemezhetők-e az ismert középértékekkel
- Érvelés a tanuló saját érdemjegyei alapján különböző statisztikai jellemzők segítségével a kedvezőbb év végi jegyért
- Különböző sportágak értékelési rendszerének és statisztikáinak bemutatása tanulói kiselőadás keretében

- Osztályok/tantárgyak eredményeinek összehasonlítása érdemjegyek és ezek középértékei alapján
- Csoportmunka keretében adott céllal készülő, megtévesztő oszlop- és kördiagramok készítése, ezek szóbeli értékelése, javítása
- Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

# 10. évfolyam

**A témakörök áttekintő táblázata:**

| Témakör neve | Javasolt óraszám |
|---|---|
| Kombinatorika, gráfok | 12 |
| Hatvány, gyök | 20 |
| Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek | 43 |
| Transzformációk, szerkesztések | 15 |
| Háromszögek-3 | 10 |
| Valószínűség-számítás | 8 |
| **Összes óraszám:** | 108 |

## TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 12 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hétköznapi helyzetekhez kapcsolódó sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezéssel
- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása matematikai problémákban
- Esetszétválasztás és szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában
- Összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában
- Gráfok alkalmazása konkrét hétköznapi és matematikai szituációk szemléltetésére, feladatok megoldására

### FOGALMAK

gráf, gráf csúcsa, gráf éle

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezett leszámlálással és a szorzási és/vagy esetszétválasztási elv alkalmazásával
- Geometriai eszközök használata kombinatorikai problémák megoldására
- Néhány feltételt tartalmazó tanulói órarend készítése kis elemszámmal
- Azonos modellen alapuló, de különböző megfogalmazású feladatok megoldása
- Szorzat vagy összeg alakban megadott eredményű kombinatorikafeladatokhoz saját szöveg írása

– Téves megoldású kombinatorikafeladatokban a hiba megtalálása és a tévedés kijavítása
– Sorba rendezési feladatok megoldásának szemléltetése gráffal
– Adott gráfhoz hozzáillő feladatszöveg alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában

## TÉMAKÖR: Hatvány, gyök

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 20 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

– ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát;
– ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

– ismeri és alkalmazza a négyzetgyök fogalmát és azonosságait;
– ismeri és alkalmazza az egész kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
– ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát;

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

– A négyzetgyök definíciója
– Nemnegatív számok négyzetgyökének megadása számológép segítségével
– A négyzetgyökvonás azonosságai
– négyzetgyökfüggvény grafikonja, tulajdonságai
– Az n-edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása
– Az n-edik gyök függvény grafikonja, tulajdonságai

### FOGALMAK

négyzetgyök, n-edik gyök

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

– A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt

## TÉMAKÖR: Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

**JAVASOLT ÓRASZÁM:** 43 **óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

– matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
– adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
– a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
– a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
– a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
– felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
– egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

– megold másodfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket; ismeri és alkalmazza a diszkriminánst, a megoldóképletet és a gyöktényezős alakot.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

– Másodfokú egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
– Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
– A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
– A kiválasztott modellben a probléma megoldása
– A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
– Egyenletek megoldása ekvivalens átalakításokkal
– Másodfokú egyenlet megoldása szorzattá alakítással, teljes négyzetté kiegészítéssel, megoldóképlettel és grafikusan
– Egyszerű másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása
– Másodfokú egyenlőtlenség megoldása grafikusan
– Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok megoldása
– $\sqrt{x+c} = ax+b$

### FOGALMAK

másodfokú egyenlet megoldóképlete, diszkriminánsz, gyöktényezős alak, ekvivalens átalakítás

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

– Másodfokú egyenlet megoldása konkrét együtthatókkal és paraméterekkel, a lépéseket párhuzamosan végezve
– Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása során
– Tanulói kiselőadás tartása magasabb fokú egyenletek megoldásának történetéről, érdekességeiről

## TÉMAKÖR: Transzformációk, szerkesztések-2

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

– ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
– ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
– alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
– ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

– ismer példákat geometriai transzformációkra;
– ismeri és alkalmazza a középpontos hasonlósági transzformációt, a hasonlósági transzformációt és az alakzatok hasonlóságát;
– geometriai szerkesztési feladatoknál vizsgálja és megállapítja a szerkeszthetőség feltételeit.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Példák ismerete geometriai hozzárendelésekre (merőleges vetítés, párhuzamos vetítés, merőleges affinitás, térkép, fényképezés)
- A középpontos hasonlósági transzformáció és a hasonlósági transzformáció ismerete, tulajdonságai
- A hasonlóság fogalmának ismerete és alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
- Gyakorlati feladatok megoldása hasonlóság segítségével (például alaprajz-, térképkészítés, modellezés)

### FOGALMAK

középpontos hasonlósági transzformáció, hasonlósági transzformáció, hasonlóság, a hasonlóság aránya

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Gyakorlati példák keresése geometriai hozzárendelésekre, például fényképezés, filmvetítés
- Az iskola közelében lévő magas épület (például templomtorony) magasságának meghatározása egy egyenes bot segítségével a bot és az épület árnyékának méréséből („Thalész-módszer”) csoportmunkában
- Valódi távolságok, valódi útvonalak hosszának meghatározása papíralapú térkép alapján

## TÉMAKÖR: Háromszögek-3

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense
- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével
- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása

### FOGALMAK

szinusz, koszinusz, tangens

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
- Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján

– Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

## TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 8 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

– konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

– tapasztalatai alapján véletlen jelenségek jövőbeni kimenetelére észszerűen tippel;
– véletlen kísérletek adatait rendszerezi, relatív gyakoriságokat számol, nagy elemszám esetén számítógépet alkalmaz.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

– Valószínűségi kísérletek elvégzése, gyakorisági, relatív gyakorisági táblázatok készítése
– A valószínűség fogalmának bevezetése statisztikai alapon
– A klasszikus valószínűségi modell fogalma és alkalmazása
– Diszkrét valószínűség-eloszlások ábrázolása hagyományos és digitális eszközzel

### FOGALMAK

valószínűségi kísérlet, esemény, elemi esemény, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség, diszkrét valószínűség-eloszlás

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

– Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (például dobások szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; tippelés az egyes kimenetelekre és becslés a bekövetkezésük valószínűségére
– Játékokban a szerencsefaktor vizsgálata, például „Ki nevet a végén” játék esetében az első hatos dobás eloszlása
– Különböző társasjátékokban stratégia meghatározása, döntéshozatal esélylatolgatás alapján
– Különböző szerencsejátékok (lottó, totó, póker, black jack, internetes sportfogadások) esetében a nyerési esély összehasonlítása
– néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

# 11–12. évfolyam

A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a matematikai kommunikációt. Az érettségi vizsgára készülés során egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

A 11–12. évfolyamon is jellemző, hogy a megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Bizonyos témakörök azonban ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a számtani és mértani sorozatok, ~~a trigonometria~~, a koordinátageometria és a térgeometria. Vannak olyan témakörök, amelyek ismeretei megjelennek más terület tanítása során is, ezért az egyes részekhez javasolt óraszámok ebben a szakaszban sem jellemeznek feltétlenül időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek, a trigonometria bővülése és a koordinátageometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy a tanulók más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazni tudják matematikai tudásukat.

## 11. évfolyam

**A témakörök áttekintő táblázata:**

| Témakör neve | Javasolt óraszám |
|---|---|
| **Kombinatorika, gráfok** | 20 |
| **Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése** | 14 |
| **Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus** | 14 |
| **Exponenciális folyamatok vizsgálata** | 14 |
| **Trigonometria** | 16 |
| **Koordinátageometria** | 30 |
| **Összes óraszám:** | 108 |

## TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok

**JAVASOLT ÓRASZÁM:20 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Matematikai és hétköznapi helyzetekhez kötődő sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása
- A binomiális együttható fogalmának ismerete, értékének kiszámítása
- Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül
- A gráf csúcsainak fokszám összege és éleinek száma közötti összefüggés ismerete és alkalmazása gyakorlati feladatok megoldásában

### FOGALMAK

faktoriális, binomiális együttható; csúcs fokszáma gráfban

### Javasolt tevékenységek

- Anagramma készítése a tanulók neveiből
- A pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározása
- A Pascal-háromszög és tulajdonságai felfedeztetése például kéttagú összeg hatványaiban szereplő együtthatók segítségével
- Különböző szituációk kétféle módon történő összeszámlálása és ebből következő egyszerű kombinatorikus összefüggések felfedezése
- Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel konkrét lejátszása, a tapasztalatok összegyűjtése

## TÉMAKÖR: SZÁMELMÉLETI ISMERETEK, számhalmazok épülése

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 14 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;
- összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
- meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat;
- érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más alapú számrendszerekben;
- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényezős felbontásból
- Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása
- Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)
- Számok felírása 10-estől különböző alapú számrendszerben
- Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata
- A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig
- Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete
- Példák irracionális számokra
- Számhalmazok műveleti zártsága

### FOGALMAK

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímek

### Javasolt tevékenységek

- Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztrükkök” bemutatása
- Számrendszerek segítségével megoldható rejtvények
- Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól
- Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás
- Halmazábra elkészítése a számhalmazokról

## TÉMAKÖR: Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 14 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékkészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Az n-edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása
- Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén
- Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén
- A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén
- Az exponenciális függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
- A logaritmus értelmezése, azonosságok
- Áttérés más alapú logaritmusra

- Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához
- Egyszerű logaritmusos egyenletek

### FOGALMAK

n-edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus

### Javasolt tevékenységek

- A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
- Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában
- Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoportmunkában
- Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével
- 10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel

## TÉMAKÖR: EXPONENCIÁLIS FOLYAMATOK VIZSGÁLATA

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 14 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- megold egyszerű, a megfelelő definíció alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket, logaritmus alkalmazása

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban
- Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

### FOGALMAK

Nincsenek új fogalmak.

### Javasolt tevékenységek

- Tanulói kiselőadás az exponenciálisan változó folyamatokról a természetben és a társadalomban

- Adatgyűjtés különböző forrásokból származó, exponenciális vagy közelítőleg annak tekinthető változókra csoportmunkában
- Gyakorlati, időben exponenciálisnak tekinthető változást mutató grafikonokra exponenciális függvény illesztése digitális eszköz segítségével, és az illesztett függvény paramétereinek értelmezése

## TÉMAKÖR: Trigonometria

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 16 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
- ismeri tompaszögek szögfüggvényeinek származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;
- ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- kiszámítja háromszögek területét;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense
- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
- Tompaszög szinusza, koszinusza, tangense
- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszi összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében
- Szinusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása
- A szinusztétel bizonyítása
- Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével
- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása

### FOGALMAK

szinusz, koszinusz, tangens, szinusztétel, koszinusztétel

### Javasolt tevékenységek

- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
- Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

## TÉMAKÖR: Koordinátageometria

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- megad pontot és vektort koordinátáival a derékszögű koordináta-rendszerben;
- koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
- koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;
- egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása
- A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása
- Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában
- Pont és vektor megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben
- Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben
- Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján
- Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái
- Szakaszfelezőpont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján
- Egyenes egyenlete $y = mx + b$ vagy $x = c$ alakban
- Egyenes meredekségének fogalma; egyenesek merőlegességének és párhuzamosságának megállapítása a meredekségek alapján
- Az egyenesek egyenletének ismeretében egyenesek metszéspontjának koordinátái
- A kör egyenletének megadása és alkalmazása a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében

### FOGALMAK

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, vektor koordinátái, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete

### Javasolt tevékenységek

- „Torpedójáték” koordináta-rendszerben
- Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével
- Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján
- Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával
- Gondolattérkép készítése a koordinátageometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában

- „Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusan, digitális eszköz segítségével
- „Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben

# 12. évfolyam

**A témakörök áttekintő táblázata:**

| Témakör neve | Javasolt óraszám |
|---|---|
| **Halmazok, matematikai logika** | 6 |
| **Sorozatok** | 24 |
| **Térgeometria** | 24 |
| **Leíró statisztika** | 12 |
| **Valószínűség-számítás** | 16 |
| **Rendszerező összefoglalás** | 46 |
| **Összes óraszám:** | 128 |

## TÉMAKÖR: Halmazok, matematikai logika

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 6 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- A halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatok bemutatása példákon keresztül
- Logikai kifejezések megfelelő használata
- Egyszerű állítások indoklása, tételek bizonyítása
- Stratégiai és logikai játékok

**FOGALMAK**

logikai műveletek

### Javasolt tevékenységek

- A tanulók mindennapi tapasztalataihoz köthető, összetett állítások logikai értékének meghatározása igazságtáblázat segítségével
- Rejtvényújságokban szereplő feladványok megfejtése következtetések láncolatán keresztül
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
- Stratégiai játékok, például NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

## TÉMAKÖR: Sorozatok

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 24 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;
- a számtani/mértani sorozat n-edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;
- a számtani/mértani sorozatok első n tagjának összegét kiszámolja;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;
- mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- A számsorozat fogalmának ismerete
- Számsorozat megadása képlettel, rekurzióval
- Számtani és mértani sorozatok felírása, folytatása adott szabály szerint
- Számtani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege
- Mértani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege
- A számtani és a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet bizonyítása
- Számtani és mértani sorozatokra vonatkozó ismeretek alkalmazása gazdasági, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában
- Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása
- Egyszerű kamat, kamatos kamat, gyűjtőjáradék és törlesztőrészlet számítása
- Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása

### FOGALMAK

számsorozat, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet

### Javasolt tevékenységek

- Tanulói kiselőadás tartása nevezetes sorozatokról, például Fibonacci-sorozat
- Az első 100 pozitív természetes szám összegének meghatározása a „kis” Gauss módszerével
- A sakktáblára elhelyezett, mezőről mezőre kétszeres számú búzaszemek kérdésének bemutatása
- Valódi pénzügyi termékek kamatozási és egyéb feltételeinek összehasonlítása csoportmunkában internetes adatgyűjtés segítségével

## TÉMAKÖR: Térgeometria

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 24 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;
- lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;
- kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát egyszerű esetekben;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket;
- ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Térelemek kölcsönös helyzetének, távolságának és hajlásszögének ismerete, alkalmazása feladatmegoldásban
- A terület, térfogat, űrtartalom mértékegységeinek és ezek átváltási szabályainak ismerete
- Síkidomok területének meghatározása
- Sűrűség mértékegységei közötti átváltás ismerete
- Sík- és térgeometriai feladatoknál a válasz megadása a problémának megfelelő mértékegységben
- A hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságainak ismerete és alkalmazása a hétköznapi életben előforduló testekkel kapcsolatban
- A kocka, a téglatest, az egyenes hasáb, az egyenes körhenger, az egyenes gúla és a forgáskúp hálójának lerajzolása konkrét esetekben
- A mindennapi életben előforduló hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számítással
- Síkidomok forgatásával keletkező egyszerű, a mindennapi életben is előforduló testek felszínének és térfogatának kiszámítása
- A hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
- A hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása

### FOGALMAK

kocka, téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp, egyenes test, forgástest, n-oldalú szabályos gúla, tetraéder, alaplap, oldallap, alapél, oldalél, alkotó, palást, testmagasság, test hálója

### Javasolt tevékenységek

- Hétköznapi tárgyak (üdítősdoboz, vizesflakon, tejfölösdoboz stb.) térfogatának megállapítása méréssel, a kapott eredmény összehasonlítása a tárgyon szereplő értékkel
- A Louvre bejárataként épített üvegpiramis földfelszín feletti térfogatának és az üvegfelület felszínének meghatározása (szükséges adatok gyűjtése az internetről)
- Annak becslése csoportmunkában, hogy a teret milyen arányban tudjuk kitölteni egybevágó érintkező gömbökkel különböző elrendezések esetén
- Különböző méretű, megközelítőleg gömb alakú gyümölcsök térfogatának és felszínének becslése, a becslés ellenőrzése méréssel
- A Föld felszínének és térfogatának közelítése földgömbmodellen méréssel és számolással, majd a kapott értékek összevetése a hivatalos adatokkal

– Projektmunka a gömbről: hogyan jelenik meg a gömb a mindennapi életben, a többi tantárgyban és a matematikában; a gömbi geometria alapjai

## TÉMAKÖR: Leíró statisztika

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 12 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

– adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
– hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
– ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására;
– felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

– A reprezentatív minta fogalmának szemléletes ismerete
– Hétköznapi, társadalmi problémákhoz kapcsolódó statisztikai adatok tervszerű gyűjtése
– Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése kvartilisekkel, középértékekkel és szóródási mutatókkal
– Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása
– A kapott adatok értelmezése, értékelése, statisztikai következtetések
– Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal
– Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése

### FOGALMAK

reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás

### Javasolt tevékenységek

– Példák reprezentatív és nem reprezentatív mintavételre
– Szavazások szimulálása és különböző szavazatértékelő rendszerek vizsgálata iskolai körülmények között
– A Simpson-paradoxon bemutatása példákon
– Az interneten található, megbízható forrásból (pl. KSH honlapja) származó statisztikák értelmezése, elemzése, lehetséges következtetések megfogalmazása
– Különböző forrásokból származó adathalmazok statisztikai elemzése, értékelése, ezekből valamilyen adott szempont alapján manipulatív és nem manipulatív diagram készítése

## TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 16 óra**

### Tanulási eredmények

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

– konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
– ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;

- ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
- meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Példák ismerete események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre
- Elemi események fogalmának ismerete, alkalmazása események előállítására
- Példák ismerete független és nem független eseményekre
- A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
- A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
- Valószínűségek meghatározása visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén
- A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
- Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)

### FOGALMAK

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

### Javasolt tevékenységek

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (pl. szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel dobálás); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; becslés az egyes kimenetelek, illetve összetett események valószínűségére csoportmunkában
- Példák keresése független és nem független, illetve egymást kizáró eseményekre csoportmunkában
- Orvosi tesztek eredményének esélyelemzése fagráf segítségével
- Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyeremény és az igazságosság fogalmának kialakítása
- Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése

## TÉMAKÖR: Rendszerező összefoglalás

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 46**

### Tanulási eredmények

A matematika épülésének elvei: ismeretek rendszerezése, alkalmazása. Motiválás. Emlékezés. Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás.

Hatékony, önálló tanulás kompetenciájának fejlesztése.

## Fejlesztési feladatok és ismeretek

| | |
|---|---|
| Halmazok. Ponthalmazok és számhalmazok. Valós számok halmaza és részhalmazai. | A problémának megfelelő szemléltetés kiválasztása (Venn-diagram, számegyenes, koordináta-rendszer). |
| Állítások logikai értéke. Logikai műveletek. | Szövegértés. A szövegben található információk összegyűjtése, rendszerezése. |
| A halmazelméleti és a logikai ismeretek kapcsolata. | Halmazok eszközjellegű használata. |
| Definíció és tétel. A tétel bizonyítása. A tétel megfordítása. | Emlékezés a tanult definíciókra és tételekre, alkalmazásuk önálló problémamegoldás során. |
| Kombinatorika: leszámlálási feladatok. Egyszerű feladatok megoldása gráfokkal. | Sorbarendezési és kiválasztási problémák felismerése.<br>Gondolatmenet szemléltetése gráffal. |
| Műveletek értelmezése és műveleti tulajdonságok. | Absztrakt fogalom és annak konkrét megjelenései: valós számok halmazán értelmezett műveletek, halmazműveletek, logikai műveletek, műveletek vektorokkal, műveletek vektorral és valós számmal, műveletek eseményekkel. |
| Gyakorlati számítások. | Kerekítés, közelítő érték, becslés, százalékszámítás Számológép használata, értelmes kerekítés. |
| Egyenletek és egyenlőtlenségek. | Megoldások az alaphalmaz, értelmezési tartomány, megoldáshalmaz megfelelő kezelésével. |
| Algebrai azonosságok, hatványozás azonosságai, logaritmus azonosságai, trigonometrikus azonosságok. | Az azonosságok szerepének ismerete, használatuk. Matematikai fogalmak fejlődésének bemutatása pl. a hatvány, illetve a szögfüggvények példáján. |
| Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása. Algebrai megoldás, grafikus megoldás. Ekvivalens egyenletek, ekvivalens átalakítások. A megoldások ellenőrzése. | Adott egyenlethez illő megoldási módszer önálló kiválasztása.<br>Az önellenőrzésre való képesség. Önfegyelem fejlesztése: sikertelen megoldási kísérlet után újjal való próbálkozás. |
| Első- és másodfokú egyenlet és egyenlőtlenség. Négyzetgyökös egyenletek. Abszolút értéket tartalmazó egyenletek. Egyszerű exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenletek. | Tanult egyenlettípusok és egyenlőtlenségtípusok önálló megoldása. |
| Elsőfokú és egyszerű másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. | A tanult megoldási módszerek biztos alkalmazása. |

| | |
|---|---|
| Egyenletekre, egyenlőtlenségekre vezető gyakorlati életből vett és szöveges feladatok. | Matematikai modell (egyenlet, egyenlőtlenség) megalkotása, vizsgálatok a modellben, ellenőrzés. |
| A függvény megadása. A függvények tulajdonságai. | Emlékezés: a fogalmak pontos felidézése, ismerete.<br>Értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, periodicitás, ~~paritás~~ fogalmak alkalmazása konkrét feladatokban.<br>Az alapfüggvények ábrázolása és tulajdonságai. |
| A tanult alapfüggvények ismerete. | Képi emlékezés statikus helyzetekben (grafikonok felidézése). |
| Függvénytranszformációk: $f(x)+c$, $f(x+c)$; $cf(x)$; $f(cx)$. Eltolás, nyújtás és összenyomás a tengelyre merőlegesen. | Kapcsolat a matematika két területe között: függvénytranszformációk és geometriai transzformációk. |
| Függvényvizsgálat a tanult szempontok szerint. | Emlékezés, ismeretek mozgósítása. |
| | Függvények használata valós folyamatok elemzésében.<br>Függvény alkalmazása matematikai modell készítésében. |
| Geometriai alapfogalmak, ponthalmazok. | |
| Térelemek kölcsönös helyzete, távolsága, szöge.<br>Távolságok és szögek kiszámítása. | Valós problémában a megfelelő geometriai fogalom felismerése, alkalmazása. |
| Geometriai transzformációk. Távolságok és szögek vizsgálata a transzformációknál. | |
| Egybevágóság, hasonlóság. Szimmetriák. | Szerepük felfedezése művészetekben, játékokban, gyakorlati jelenségekben. |
| Háromszögekre vonatkozó tételek és alkalmazásuk.<br>A háromszög nevezetes vonalai, pontjai és körei. Összefüggések a háromszög oldalai, oldalai és szögei között.<br>A derékszögű háromszög oldalai, oldalai és szögei közötti összefüggések. | Állítások, tételek jelentésére való emlékezés.<br>A problémának megfelelő összefüggések felismerése, alkalmazása. |
| Négyszögekre vonatkozó tételek és alkalmazásuk. | Állítások, tételek jelentésére való emlékezés. |

| | |
|---|---|
| Négyszögek csoportosítása különböző szempontok szerint. Szimmetrikus négyszögek tulajdonságai. | |
| Körre vonatkozó tételek és alkalmazásuk.<br><br>Számítási feladatok. | |
| Vektorok, vektorok koordinátái. Bázisrendszer. | |
| Vektorok alkalmazásai. | |
| Egyenes egyenlete. Kör egyenlete. Két alakzat közös pontja. | Geometria és algebra összekapcsolása. |
| Diagramok. Statisztikai mutatók: módusz, medián, átlag, szórás. | Adathalmazok jellemzése önállóan választott mutatók segítségével. A reprezentatív minta jelentőségének megértése. |
| Gyakoriság, relatív gyakoriság. Véletlen esemény valószínűsége.<br><br>A valószínűség kiszámítása a klasszikus modell alapján.<br><br>A véletlen törvényszerűségei. | A valószínűség és a statisztika törvényei érvényesülésének felfedezése a termelésben, a pénzügyi folyamatokban, a társadalmi folyamatokban.<br><br>A szerencsejátékok igazságtalanságának és a játékszenvedély veszélyeinek felismerése. |

### FOGALMAK

Következtetés. Definíció. Tétel. Bizonyítás. Halmaz, alaphalmaz, igazsághalmaz, megoldáshalmaz. Függvény/transzformáció. Értelmezési tartomány. Művelet, műveleti tulajdonság. Egyenlet, azonosság, egyenletrendszer, egyenlőtlenség. Ekvivalencia. Ellenőrzés. Véletlen, valószínűség. Adat, statisztikai mutató. Térelem, mennyiségi jellemző (távolság, szög, kerület, terület, felszín, térfogat). Matematikai modell.

Német Nemzetiségi Gimnázium és Kollégium
Budapest

# Helyi tanterv

# Matematika emelt szint a 11-12.évfolyam számára

Az emelt szintű érettségi vizsgára való felkészítéshez a részletes érettségi vizsgakövetelmények az irányadóak

# Emelt szintű matematika

## 11–12. évfolyam

Ez a szakasz az érettségire felkészítés időszaka is, ezért a fejlesztésnek kiemelten fontos tényezője az elemző és összegző képesség alakítása. Ebben a két évfolyamban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, emellett sok, gyakorlati területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyekhez kell az előző évek alapozása, amelyek kissé összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi előtt már elvárható többféle ismeret együttes alkalmazása. A sík- és térgeometriai fogalmak és tételek mind a térszemlélet, mind az analógiás gondolkodás fejlesztése szempontjából lényegesek. A koordináta-geometria elemeinek tanításával a matematika különböző területeinek összefüggéseit s így a matematika komplexitását mutatjuk meg.

Minden témában nagy hangsúllyal ki kell térnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára. A statisztikai kimutatások és az információk kritikus értelmezése, az esetleges manipulációs szándék felfedeztetése hozzájárul a vállalkozói kompetencia fejlesztéséhez, a helyes döntések meghozatalához. Gyakran alkalmazhatjuk a digitális technikát az adatok, problémák gyűjtéséhez, a véletlen jelenségek vizsgálatához. A terület-, felszín-, térfogatszámítás más tantárgyakban és mindennapjaink gyakorlatában is elengedhetetlen. A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakításra.

Az emelt szintű matematikát választó tanulók többsége olyan egyetemen, főiskolán fog továbbtanulni, ahol a matematika tantárgy a képzés lényeges része. Ilyen továbbtanulási cél lehet az egyetemek elméleti matematikára építő természettudományi karai, az alkalmazásokat is igénylő műszaki pályák, a közgazdasági és pénzügyi pályák. Így ezekben az években alapos ismeretekre törekszünk a tárgyalt témakörökben, az alapóraszámos csoportokhoz képest mélyebben tárgyaljuk a trigonometriát, koordinátageometriát, a kombinatorikát, a valószínűség-számítást, megismerkedünk a határérték fogalmával, a differenciálszámítás és az integrálszámítás elemeivel is. A csoport összetételétől, a gyerekek továbbtanulási szándékától függően a tanár nagyobb hangsúlyt adhat az analízis eszközeinek megismertetésének vagy a valószínűség-számítási ismeretek elmélyítésének stb. Minden témában a fogalmak, alkalmazások értő tudásáig el kell jutni.

A matematikát szerető, a matematikai problémák iránt érdeklődő tanulók számára érdekes, nehezebb, gondolkodtatóbb feladatok, problémák kitűzésével, a különböző megoldási lehetőségek, diszkussziók megbeszélésével a matematika iránti érdeklődést tudatosan fejlesztjük.

Az anyanyelvi kommunikáció fejlesztését is segíti, ha önálló kiselőadások, prezentációk elkészítését, megtartását várjuk el a diákoktól. A fejlesztés eredményeként a kétéves periódus végére elvárható, hogy emelt szinten, a szóbeli vizsgán szabatosan, összefüggően tudják magukat kifejezni.

**Ezek a célkitűzések csak akkor érhetők el, ha a tanulók külön fakultációs csoportban vesznek részt a legalább heti 5, illetve 6 tanítási órán.**

## 11. évfolyam

## Célok és feladatok

A 11. évfolyamon tovább kell folytatni a tanulók kombinatív készségének fejlesztését, a feladatmegoldásban a minél többféle megoldási mód keresésének ösztönzését, a bizonyítás iránti igény mélyítését. Ezen az évfolyamon elvárható a pontos fogalomalkotásra való törekvés. Fontos cél a tanulók absztrakciós és szintetizáló képességének továbbfejlesztése is.

A 11. évfolyam témakörei lehetőséget biztosítanak arra, hogy a tanulók becsléseket végezzenek, és a becsléseiket összevessék a számításokkal. Különösen az algebrai számítások adnak rá jó lehetőséget, hogy az önellenőrzés igényét felkeltsük, továbbfejlesszük. Több terület (egyenletek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok, függvények, geometria) összetettebb feladatai is igénylik a tervszerű munka végzését.

A különböző transzformációk, a koordinátageometria egyes területei, valamint bizonyos geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel is jó lehetőséget adnak arra, hogy felismertessük az összefüggéseket a matematika különböző területei között. Több lehetőség is kínálkozik arra (egyenletek, függvények, vektorok stb.), hogy bemutassuk a fizika és a matematika szoros kapcsolatát, miközben a legkülönbözőbb területen van lehetőségünk a gyakorlati problémák matematizálására, a modellalkotása (lásd például a gráfok). Szinte minden témakörben alkalmunk van a zsebszámológép alkalmaztatására, és igen gyakran tudjuk a számítógépet is segítségül hívni a feladatok megoldásához, az adatok, problémák gyűjtéséhez (lásd például statisztikai adatok), a véletlen jelenségek vizsgálatához, a megoldások prezentációjához.

A geometria több területe is alkalmas az esztétikai érzék fejlesztésére.

Elengedhetetlen az elemi függvények ábrázolása koordináta-rendszerben és a legfontosabb függvénytulajdonságok meghatározása nemcsak a matematika, hanem a természettudományos ismeretek megértése miatt, különböző gyakorlati helyzetek leírásának érdekében is.

| Tematikai egység címe | órakeret |
|---|---|
| **Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok** | **27** |
| **Hatvány, gyök, logaritmus** | **33** |
| **Trigonometria** | **45** |
| **Koordinátageometria** | **36** |
| **Sorozatok** | **34** |
| **Ellenőrzés, számonkérés** | **5** |

| Tematikai egység/ Fejlesztési cél | 1. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok | Órakeret 27 óra |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | Matematikai állítások elemzése, igaz és hamis állítások. Logikai műveletek: NEM, ÉS, VAGY. Skatulya elv, logikai szita. Sorbarendezési és kiválasztási feladatok, gráfhasználat feladatmegoldásban. Gráf, csúcs, él, fokszám. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | Korábban megismert fogalmak ismétlése, elmélyítése. Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban. | |

| Ismeretek/fejlesztési követelmények | Kapcsolódási pontok |
|---|---|
| Számhalmazok.<br>Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig.<br>Algebrai számok, transzcendens számok.<br>Halmazok számossága.<br>Halmazok ekvivalenciája.<br>Végtelen és véges halmazok.<br>Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok.<br>Kontinuum-sejtés.<br>*Matematikatörténet*: Cantor, Hilbert, Gödel. | *Filozófia*: Gondolati rendszerek felépítése. Bizonyíthatóság. |
| Kombinatorika. (A korábbi ismeretek összegzése.)<br>Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.<br>Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.<br>Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel.<br>(Vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül ismétlés, rendszerezés.)<br>Binomiális együtthatók, tulajdonságaik.<br>Pascal-háromszög és tulajdonságai.<br>Binomiális tétel.<br>*Matematikatörténet*: Blaise Pascal.<br>Néhány kombinatorikus geometriai probléma.<br>*Matematikatörténet*: Erdős Pál. | |
| Gráfok.<br>Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, fokszám<br>Definiálja a következő fogalmakat: egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf.<br>Gráfokra, éleikre, csúcsok fokszámaira vonatkozó egyszerű tételek.<br>Euler-vonal, Hamilton-kör.<br>Gráfok alkalmazása leszámolásos feladatokban – rendszerező ismétlés.<br>*Matematikatörténet*: Euler. | *Biológia-egészségtan*: genetika. |
| A matematika felépítése.<br>Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések.<br>Műveletek a matematikában.<br>Műveleti tulajdonságok. | *Filozófia:* Gondolati rendszerek felépítése. Állítások igazolásának szükségessége. |

| | |
|---|---|
| Relációk a matematikában és a mindennapi életben.<br>Relációtulajdonságok.<br>Bizonyítási módszerek áttekintése:<br>Direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulya elv, teljes indukció. Tételek megfordítása. | |
| **Kulcsfogalmak/ fogalmak** | Permutáció, variáció, kombináció, művelet, reláció, binomiális együttható. |

| **Tematikai egység/ Fejlesztési cél** | **2. Hatvány, gyök, logaritmus** | **Órakeret 33 óra** |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | Hatványozás egész kitevővel, hatványozás azonosságai, n-edik gyök, gyökvonás azonosságai. Valós számok halmaza. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | A matematika belső fejlődésének felismerése, új fogalmak alkotása: a racionális kitevő értelmezése, az irracionális kitevőjű hatvány szemléletes fogalma. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban: exponenciálisan, logaritmikusan változó mennyiségek. Más tudományágakban a matematika alkalmazásának felfedezése. | |

| **Ismeretek/fejlesztési követelmények** | **Kapcsolódási pontok** |
|---|---|
| A racionális kitevőjű hatványok, a hatványozás azonosságainak ismétlése.<br>Számolás racionális kitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel. Ismerje és alkalmazza a gyökvonás azonosságait.<br>Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal.<br>A hatványfogalom kiterjesztése irracionális számra.<br>Az exponenciális függvény.<br>Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata. | *Technika, életvitel és gyakorlat:* kamatszámítás, hitelfelvétel, törlesztőrészlet-számítás.<br><br>*Fizika:* radioaktivitás. |
| Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek.<br>Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.<br>Exponenciális egyenletre vezető valós problémák megoldása. | *Földrajz*: globális problémák (pl. demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és az élelmezési válság, betegségek, világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás). |
| Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival.<br>A logaritmus fogalma.<br>Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel.<br>A logaritmus azonosságai.<br>Szorzat, hányados, hatvány logaritmusa, áttérés más alapú logaritmusra. Bizonyítsa az áttérés szabályát.<br>Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál. | *Technika, életvitel és gyakorlat*: zajszennyezés.<br><br>*Kémia:* pH-számítás. |

| | |
|---|---|
| A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.<br>*Matematikatörténet*: Napier, Kepler. A logaritmus fogalmának kialakulása, változása. Logaritmustáblázat. | |
| A logaritmusfüggvény.<br>A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.<br>Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata.<br>Inverz függvénykapcsolat. | *Fizika*: régészeti leletek – kormeghatározás. |
| Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek.<br>Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.<br>Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmusos egyenleteknél. | |
| Paraméteres exponenciális és logaritmusos egyenletek. | |
| Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek összegzése. | |
| **Kulcsfogalmak/ fogalmak** | Racionális kitevőjű hatvány. Exponenciális növekedés, csökkenés. Logaritmus. |

| **Tematikai egység/ Fejlesztési cél** | **3. Trigonometria** | **Órakeret 46 óra** |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | Vektorokkal végzett műveletek. Hegyesszögek szögfüggvényei, szögmérés fokban és radiánban, szögfüggvények közötti egyszerű összefüggések. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | A geometriai látásmód fejlesztése. A művelet fogalmának bővítése egy újszerű művelettel, a skaláris szorzással. Algebrai és geometriai módszerek közös alkalmazása számítási, bizonyítási feladatokban. A tanultak felfedezése más tudományterületeken is. A függvényszemlélet alkalmazása az egyenletmegoldás során, végtelen sok megoldás keresése. | |

| **Ismeretek/fejlesztési követelmények** | **Kapcsolódási pontok** |
|---|---|
| A vektorokról tanultak rendszerező ismétlése:<br>– a vektor fogalma,<br>– vektorműveletek,<br>– vektorfelbontás.<br>A vektorok koordinátáival végzett műveletek és tulajdonságaik.<br>A vektor 90°-os elforgatottjának koordinátái. | |
| A szögfüggvények általános értelmezése.<br>Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták.<br>A szögfüggvények előjele a különböző síknegyedekben.<br>Szögfüggvények közötti összefüggések.<br>Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása.<br>A trigonometrikus függvények.<br>A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek, | *Fizika:* harmonikus rezgőmozgás, hullámmozgás leírása.<br><br>*Informatika*: grafikonok elkészítése számítógépes |

| | |
|---|---|
| szélsőérték, periódus, monotonitás.<br>A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat. | programmal. |
| Két vektor skaláris szorzata.<br>A skaláris szorzat tulajdonságai.<br>A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási feladatokban.<br>Merőleges vektorok skaláris szorzata.<br>Szükséges és elégséges feltétel.<br>Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével.<br>A skaláris szorzat és a Cauchy-egyenlőtlenség kapcsolata.<br>Vektorok vektoriális szorzata.<br>Szemléletes kép, bizonyítások nélkül. | *Fizika*: munka, elektromosságtan. |
| A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével.<br>A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével.<br>Szinusztétel.<br>Koszinusztétel.<br>A tételek pontos kimondása, bizonyítása.<br>Kapcsolat a Pitagorasz-tétellel.<br>Általános háromszög adatainak meghatározása. Egyértelműség vizsgálata.<br>Szög, távolság, terület meghatározása gyakorlati problémákban is.<br>Bizonyítási feladatok. | *Technika, életvitel és gyakorlat*: alakzatok adatainak meghatározása.<br><br>*Földrajz*: távolságok, szögek kiszámítása – terepmérési feladatok. GPS-helymeghatározás. |
| Szögfüggvények közötti összefüggések.<br>Addíciós tételek:<br>– két szög összegének és különbségének szögfüggvényei,<br>– egy szög kétszeresének szögfüggvényei,<br>– félszögek szögfüggvényei,<br>– két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása.<br>A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása.<br>Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása.<br>Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel. | |
| Trigonometrikus egyenletek.<br>Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése.<br>Trigonometrikus egyenlőtlenségek.<br>Grafikus megoldás vagy egységkör alkalmazása.<br>Időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata.<br>Trigonometrikus kifejezések szélsőértékének keresése. | *Fizika*: rezgőmozgás, adott kitéréshez, sebességhez, gyorsuláshoz tartozó időpillanatok meghatározása. |
| **Kulcsfogalmak/ fogalmak** | Skaláris szorzat, szinusztétel. koszinusztétel, addíciós tétel, trigonometrikus azonosság, egyenlet. |

| Tematikai egység/ Fejlesztési cél | 4. Koordinátageometria | Órakeret 36 óra |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | Koordinátarendszer, vektorok, vektorműveletek megadása koordinátákkal. Ponthalmazok koordináta-rendszerben. Függvények ábrázolása. Elsőfokú, másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | Elemi geometriai ismeretek megközelítése új eszközzel. Geometriai problémák megoldása algebrai eszközökkel. Számítógép használata. | |

| Ismeretek/fejlesztési követelmények | Kapcsolódási pontok |
|---|---|
| A Descartes-féle koordinátarendszer.<br>A helyvektor és a szabadvektor.<br>Rendszerező ismétlés. Ismerje az egyértelmű vektorfelbontás tételét. | *Informatika:* számítógépes program használata. |
| Vektor abszolútértékének kiszámítása.<br>Két pont távolságának kiszámítása.<br>A Pitagorasz-tétel alkalmazása.<br>Két vektor hajlásszöge. Tudja koordinátákkal adott vektorok hajlásszögét meghatározni.<br>Skaláris szorzat használata. | |
| Szakasz osztópontjának koordinátái. Tudja kiszámítani szakasz *n:m* arányú osztópontjának koordinátáit.<br>A háromszög súlypontjának koordinátái.<br>Elemi geometriai ismereteket alkalmazása, vektorok használata, koordináták számolása. | *Fizika*: alakzatok tömegközéppontja. |
| Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens.<br>A különböző jellemzők közötti kapcsolat értése, használata.<br>Az egyenes egyenletei.<br>– Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete.<br>– Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszere térben.<br>– Iránytényezős egyenlet.<br>Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel.<br>Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata.<br>A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása.<br>Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele.<br>Két egyenes metszéspontja.<br>Két egyenes hajlásszögének meghatározása.<br>Skaláris szorzat használata. | *Fizika*: mérések értékelése.<br><br>*Informatika:* számítógépes program használata. |
| A kör egyenlete.<br>Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata.<br>Kör és egyenes kölcsönös helyzete. | *Informatika:* számítógépes program használata. |

| | |
|---|---|
| A kör érintőjének egyenlete.<br>Két kör közös pontjainak meghatározása.<br>Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.<br>A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.<br>Szerkeszthetőségi kérdések. | |
| A parabola tengelyponti egyenlete.<br>A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes.<br>A parabola és a másodfokú függvény.<br>Teljes négyzetté kiegészítés.<br>A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete.<br>A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió. | *Fizika*: geometriai optika, fényszóró, visszapillantó tükör. |
| Összetett feladatok megoldása paraméter segítségével vagy a szerkesztés menetének követésével.<br>Mértani helyek keresése.<br>Apollóniosz-kör.<br>Merőleges affinitással kapott mértani helyek.<br>Ponthalmazok a koordinátasíkon.<br>Egyenlőtlenséggel megadott egyszerű feltételek.<br>Lineáris programozási feladat. | *Informatika:* több feltétel együttes vizsgálata. |
| **Kulcsfogalmak/ fogalmak** | Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényező. Egyenes, kör, parabola egyenlete. |

| **Tematikai egység/ Fejlesztési cél** | **5. Sorozatok** | **Órakeret 34 óra** |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | Számtani sorozat, mértani sorozat fogalma, egyszerű alapösszefüggések. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele. Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása. Összefüggések, képletek hatékony alkalmazása. | |
| **Ismeretek/fejlesztési követelmények** | | **Kapcsolódási pontok** |
| A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása.<br>Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése.<br>Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat.<br>Rekurzív sorozat *n*-edik elemének megadása.<br>*Matematikatörténet*: Fibonacci. | | *Informatika*: algoritmusok. |

| | |
|---|---|
| Számtani sorozat.<br>A számtani sorozat *n*-edik tagja.<br>A számtani sorozat első *n* tagjának összege.<br>Mértani sorozat.<br>A mértani sorozat *n*-edik tagja.<br>A mértani sorozat első *n* tagjának összege.<br>Számítási feladatok számtani és a mértani sorozatokra.<br>Szöveges faladatok gyakorlati alkalmazásokkal.<br>A számtani sorozat mint lineáris és a mértani sorozat mint exponenciális függvény összehasonlítása.<br>Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása.<br>Törlesztési feladatok.<br>Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel, THM, gyűjtőjáradék.<br>Véges sorok összegzése.<br>Számtani és mértani sorozatból előállított szorzatok összegzése.<br>Teleszkópos összegek.<br>*Matematikatörténet*: Fibonacci. | *Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz; történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek*: lineáris és exponenciális folyamatok.<br><br>*Technika, életvitel és gyakorlat:* hitel – adósság – eladósodás. |
| Sorozatok konvergenciája. Ismerje és alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozat definícióját.<br>A határérték szemléletes és pontos definíciói.<br>Műveletek konvergens sorozatokkal.<br>Konvergens és divergens sorozatok.<br>Az $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozatok.<br>Konvergens sorozatok tulajdonságai.<br>Torlódási pont.<br>Konvergens sorozatnak egy határértéke van.<br>Minden konvergens sorozat korlátos.<br>Monoton és korlátos sorozat konvergens.<br>Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Rendőrelv.<br>Alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértékére vonatkozó tételeket. | |

| | |
|---|---|
| Végtelen sorok.<br>Végtelenen sor konvergenciája, összege.<br>Végtelen mértani sor.<br>Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása.<br>További példák konvergens sorokra.<br>Teleszkópos összegek.<br>Négyzetszámok reciprokainak összege.<br>Példák nem konvergens sorokra.<br>Harmonikus sor.<br>Feltételesen konvergens sorok. | |

| | |
|---|---|
| **Kulcsfogalmak/ fogalmak** | Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat. Sorozat határértéke. |

## 12. évfolyam

## Célok és feladatok

A 12. évfolyam fő feladata matematikából a tanult ismeretek több szempontú rendszerezése, felkészülés az érettségire. Ennek érdekében szükséges a matematika különböző területei közti összefüggéseinek tudatosítása, az absztrakciós készség fejlesztése. a deduktív gondolkodás továbbfejlesztése.

A középiskolai tanulmányok végére a korábban szemléletesen, tevékenységek segítségével kialakított fogalmaknak meg kell erősödniük, egyes fogalmakat pontosan kell definiálni, általánosítani. Meg kell ismertetni a tanulókat a matematika axiomatikus felépítésének elvével.

A következtetési, a bizonyítási készség fejlesztése hangsúlyos ennél a korosztálynál. A „ha ..., akkor ...”, az „akkor és csak akkor” helyes használata az élet számos területén (nem csak a matematikában) fontos.

Az érettségiig szükség van a valós számkör biztos ismeretére, az e számkörben megismert műveletek gyakorlati és elvontabb feladatokban való alkalmazására is. A tananyag különböző fejezeteiben a számításoknál fontos a zsebszámológép, a számítógép biztos használata, a számítógép alkalmazása.

A függvények ábrázolása koordinátarendszerben és a legjellemzőbb függvénytulajdonságok ismerete a természettudományos tárgyak megértése és különböző gyakorlati problémák megoldása érdekében kiemelkedően fontos.

Mai látásunk szerint az élet sok területén (természettudomány, társadalomtudomány, közgazdaságtan) statisztikus törvényekkel írhatók le jól a jelenségek. Ezért hangsúlyossá vált a valószínűségszámítás és a statisztika alapelemeinek megismertetése. Ezen ismeretek rendszerező összefoglalására ennek a korosztálynak az általános szellemi érettsége ad lehetőséget.

A sík- és térgeometriai fogalmak és tételek mind a térszemlélet, mind az analógiás gondolkodás fejlesztése szempontjából lényegesek. A terület-, felszín-, térfogatszámítás más

tantárgyakban is elengedhetetlen. A koordináta-geometria ismétlésekor a matematika különböző területeinek összefüggéseit, s így a matematika komplexitását hangsúlyozhatjuk.

Az analízis témaköreinek elsajátítása az absztrakciós, szintetizáló és képességet növeli és egyben biztosítja az elméleti és gyakorlati alapot a későbbi sikeres felsőoktatási tanulmányokhoz.

El kell jutni ahhoz, hogy a tanulók a különböző témakörökben megismert összefüggéseket feladatokban, gyakorlati problémákban alkalmazzák.

| Tematikai egység címe | órakeret |
|---|---|
| **Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása** | **6** |
| **Folytonosság, differenciálszámítás** | **38** |
| **Területszámítás, integrálszámítás. Térgeometria** | **60** |
| **Statisztika, valószínűség** | **35** |
| **Rendszerező összefoglalás** | **47** |
| **Ellenőrzés, számonkérés** | **6** |

| **Tematikai egység/ Fejlesztési cél** | **1. Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása** | **Órakeret 6 óra** |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | Nevezetes azonosságok ismerete. Közepek és sorendjük ismerete két változóra. Másodfokú és trigonometrikus függvények ismerete. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása. A modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal. A szélsőérték-problémához illő megoldási mód kiválasztása. Gyakorlat optimális megoldások keresésében. | |
| **Ismeretek/fejlesztési követelmények** | | **Kapcsolódási pontok** |
| Azonos egyenlőtlenségek.<br>Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek.<br>(Többváltozós alak bizonyítása fokozatos közelítés módszerével.)<br>Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték-feladatok megoldásában.<br>Szélsőérték-feladatok megoldása függvénytulajdonságok segítségével.<br>(Másodfokú és trigonometrikus függvényekkel.)<br>Szélsőérték-feladatok megoldása fokozatos közelítés módszerével. | | |
| **Kulcsfogalmak/ fogalmak** | Szélsőértékhely, szélsőérték. Nevezetes közép. | |

| Tematikai egység/ Fejlesztési cél | 2. Függvények határértéke, folytonossága. Differenciálszámítás | Órakeret 38 óra |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | Függvények megadása, értelmezési tartomány, értékkészlet. Függvények jellemzése: zérushely, korlátosság, szélsőérték, monotonitás, paritás, periodicitás. Sorozatok határértéke. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | Megismerkedés a függvények vizsgálatának új módszerével. A függvény folytonossága és határértéke fogalmának megalapozása. A differenciálszámítás módszereinek használta a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára. A matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is alkalmazások keresése. | |

| Ismeretek/fejlesztési követelmények | Kapcsolódási pontok |
|---|---|
| A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése.<br>Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése.<br>Ismerje és alkalmazza az inverz függvény fogalmát. Ismerje az összetett függvény fogalmát, képzésének módját. | *Informatika:* számítógépes szoftver alkalmazása függvények grafikonjának megrajzolására. |
| Függvény határértéke.<br>A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések.<br>Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke.<br>A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata.<br>A $\frac{\sin x}{x}$ függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke. | *Informatika*: a határérték számítógépes becslése.<br><br>*Fizika*: felhasználás sin $x$, illetve tg $x$ közelítésére kis szög esetében. |
| A függvények folytonossága.<br>Példák folytonos és nem folytonos függvényekre.<br>A folytonosság definíciói.<br>Intervallumon folytonos függvények.<br>Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.<br>(Bizonyítások nélkül, de ellenpéldákkal azokra az esetekre, ha az intervallum nem korlátos, nem zárt, illetve ha a függvény nem folytonos.) | *Fizika:* példák folytonos és diszkrét mennyiségekre. |
| Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére.<br>A függvénygörbe érintőjének iránytangense.<br>A pillanatnyi sebesség meghatározása. | *Fizika:* az út-idő függvény és a pillanatnyi sebesség kapcsolata.<br>A fluxus és az indukált feszültség kapcsolata.<br><br>*Biológia-egészségtan:* populáció növekedésének átlagos |

| | |
|---|---|
| | sebessége. |
| A differenciálhatóság fogalma.<br>A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény.<br>Példák nem differenciálható függvényekre is.<br>Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között.<br>Alapfüggvények deriváltja:<br>Konstans függvény, $x^n$, trigonometrikus függvények deriváltja.<br>Műveletek differenciálható függvényekkel.<br>Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja.<br>Inverz függvény deriváltja.<br>Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. (Bizonyítás nélkül.)<br>Magasabbrendű deriváltak.<br>*Matematikatörténet*: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass. | *Fizika*: harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége, gyorsulása – ezek kapcsolata. |
| A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.<br>– Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény.<br>– Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték.<br>A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása. | *Fizika*: fizikai tartalmú függvények (pl. út-idő, sebesség-idő) deriváltjainak jelentése. |
| Konvexitás vizsgálata deriválással.<br>A konvexitás definíciója.<br>Inflexiós pont.<br>A második derivált és a konvexitás kapcsolata. | |
| Függvényvizsgálat differenciálszámítással.<br>Összevetés az elemi módszerekkel. | |
| Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása.<br>A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése. | *Fizika*: Fermat-elv, Snellius-Descartes törvény. Fizikai jellegű szélsőérték-problémák. |
| **Kulcsfogalmak/ fogalmak** | Függvényfolytonosság, -határérték. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabbrendű derivált. Monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. Konvex, konkáv függvény. |

| **Tematikai egység/ Fejlesztési cél** | **3.Terület és integrálszámítás, térgeometria** | **Órakeret 60 óra** |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | Folytonos függvények fogalma. Területszámítás elemei. Sorozatok, véges sorok. Differenciálási szabályok ismerete. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | Az integrálszámítás módszereivel találkozva a közelítő módszerek ismeretének bővítése. A függvény alatti terület alkalmazásai a matematika és a fizika több területén. Áttekintő képet kialakítása a térgeometriáról, a felszín- és térfogatszámítás módszereiről. | |

| Ismeretek/fejlesztési követelmények | Kapcsolódási pontok |
|---|---|
| A területszámítás alapelvei.<br>Néhány egyszerűbb alakzat területének levezetése az alapelvekből.<br>A területszámítás módszereinek áttekintése.<br>Területszámítási módszerek alkalmazása a matematika más témaköreiben. (Pl. geometriai bizonyításokban.) | |
| Bevezető feladatok az integrál fogalmához.<br>Függvény grafikonja alatti terület.<br>A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület.<br>A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján. | |
| Alsó és felső közelítő összegek.<br>Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása.<br>Közelítés véges összegekkel.<br>A határozott integrál fogalma, jelölése.<br>A szemléletes megközelítésre alapozva eljutás a pontos definícióig.<br>Példa nem integrálható függvényre is.<br>Negatív függvény határozott integrálja.<br>A határozott integrál és a terület-előjeles terület.<br>Az integrál közelítő kiszámítása.<br>Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére.<br>*Matematikatörténet*: Bernhard Riemann. | *Informatika*: számítógépes szoftver használata. |
| Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele.<br>Korlátos és monoton függvények integrálhatósága.<br>A határozott integrál tulajdonságai. | *Fizika:* A munka és a mozgási energia. Elektromos feszültség két pont között, a potenciál. Tehetetlenségi nyomaték. Alakzat tömegközéppontja. A hidrosztatikai nyomás és az edény oldalfalára ható erő. Effektív áramerősség. |
| Az integrál mint a felső határ függvénye.<br>Integrálfüggvény.<br>Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja.<br>Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között.<br>A primitív függvény fogalma.<br>A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál:<br>– hatványfüggvény, polinomfüggvény,<br>– trigonometrikus függvények,<br>– exponenciális függvény, logaritmusfüggvény.<br>A Newton-Leibniz-tétel.<br>Integrálási módszerek: | |

| | |
|---|---|
| Integrálás helyettesítéssel.<br>*Matematikatörténet*: Newton, Leibniz, Euler. | |
| Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra.<br>Két függvénygörbe közötti terület meghatározása.<br>Forgástest térfogatának meghatározása.<br>Henger, kúp, csonkakúp (bizonyítsa a csonkakúp térfogatképletét)., gömb, gömbszelet térfogata.<br>Az integrálás közelítő módszerei – numerikus módszerek. | *Fizika:* Potenciál, munkavégzés elektromos, illetve gravitációs erőtérben. Váltakozó áram munkája, effektív áram és feszültség. Newton munkássága. |
| Térgeometria elemei.<br>Tetraéderekre vonatkozó tételek.<br>(Van-e beírt, körülírt gömbje, súlypontja, magasságpontja?)<br>Tetraéder és paralelepipedon.<br>Euler-féle poliéder-tétel. (Bizonyítás nélkül.)<br>Szabályos testek. | *Kémia*: kristályok.<br><br>*Művészetek*: szimmetriák. |
| A térfogatszámítás alapelvei.<br>Néhány egyszerűbb test térfogatának levezetése az alapelvekből.<br>A térfogatszámítás áttekintése.<br>A térfogatszámítás néhány új eleme.<br>Cavalieri-elv, a gúla térfogata.<br>Csonkagúla térfogata. Bizonyítsa a térfogatképletét.<br>Érintőpoliéderek térfogata.<br>Alakzatok felszíne, hálója.<br>Csonkakúp felszíne.<br>Gömb felszínének levezetése (Heurisztikus, nem precíz módszerrel.) | |
| **Kulcsfogalmak/ fogalmak** | Alsó- és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Newton-Leibniz-tétel.<br>Felszín, térfogat, forgástestek, csonkagúla, csonkakúp, gömb. |

| **Tematikai egység/ Fejlesztési cél** | **4. Statisztika, valószínűség** | **Órakeret 35 óra** |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | Adatok elemzése, táblázatok, grafikonok használata. Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Klasszikus valószínűségi modell. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | A valószínűség fogalmának bővítése, mélyítése. A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására. Mit jelent a valószínűség – a nagy számok törvénye. | |

| **Ismeretek/fejlesztési követelmények** | **Kapcsolódási pontok** |
|---|---|
| Statisztikai mintavétel.<br>Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül.<br>Számsokaságok jellemzése: átlag, medián, módusz, szórás.<br>Gyakorlati példák arra, hogy mikor melyik mutatóval célszerű jellemezni a számsokaságot.<br>Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés. | *Informatika*: táblázatkezelő, adatbázis-kezelő program használata.<br><br>*Történelem,* |

| | |
|---|---|
| A medián és az átlag minimumtulajdonsága.<br>Közvélemény-kutatás. Statisztikai évkönyv.<br>Minőség-ellenőrzés. | *társadalmi és állampolgári ismeretek*: választások. |
| Eseményalgebra.<br>Kapcsolat a halmazok és a logika műveleteivel.<br>*Matematikatörténet*: George Boole. | |
| Véletlen jelenségek megfigyelése.<br>A modell és a valóság kapcsolata.<br>Szerencsejátékok elemzése.<br>Klasszikus valószínűségi modell.<br>Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége.<br>Kizáró események, független események valószínűsége.<br>Feltételes valószínűség.<br>Várható érték<br>Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján.<br>A várható értéket kiszámítása diszkrét egyenletes és a binomiális eloszlás esetén.<br>Nagy számok törvénye. (Szemléletes tárgyalás képletek nélkül.)<br>Geometriai valószínűség.<br>*Matematikatörténet*: Pólya György, Rényi Alfréd. | *Informatika:* véletlen jelenségek számítógépes szimulációja. |
| **Kulcsfogalmak/ fogalmak** | Valószínűség, kizáró esemény, független esemény, várható érték |

| **Tematikai egység/ Fejlesztési cél** | **5. Rendszerező összefoglalás** | **Órakeret 47óra** |
|---|---|---|
| **Előzetes tudás** | A 4 év matematika-tananyaga. | |
| **A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai** | Ismeretek rendszerezése, alkalmazása az egyes témakörökben.<br>Felkészítés az emelt szintű érettségire: az önálló rendszerzés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, alkalmazási lehetőségek megtalálása. Kapcsolatok keresése különböző témakörök között. Elemzőkészség, kreativitás fejlesztése.<br>Felkészítés a felsőfokú oktatásra. | |
| **meretek/fejlesztési követelmények** | | **Kapcsolódási pontok** |
| *Gondolkodási módszerek*<br>*Halmazok, matematikai logika*<br>Halmazok, megadási módjaik, részhalmaz, kiegészítő halmaz. Halmazok közötti műveletek. Ismerje és alkalmazza a de Morgan azonosságokat. Tudja alkamazni a logikai szita módszerét egyszerűbb esetekben.<br>Végtelen halmazok elmélete; számosságok. Ismerje a megszámlálhatóan végtelen halmaz definícióját. Bizonyítsa egyszerűbb esetekben, hogy egy halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen. | | *Filozófia*: gondolati rendszerek felépítése, fejlődése. |

| | |
|---|---|
| Állítások, logikai értékük.<br>Negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia.<br>Univerzális és egzisztenciális kvantor.<br>*Kombinatorika, gráfok, algoritmusok*<br>Permutáció, variáció, kombináció.<br>Binomiális tétel. Pascal háromszög. Ismerje a Pascal-háromszög alapvető tulajdonságait.<br>Elemi gráfelméleti ismeretek.<br>Euler-féle poliédertétel.<br>A bizonyítások fejlődése és a bizonyítási módszerek változása.<br>Nevezetes sejtések. | |
| *Algebra és számelmélet*<br>*Műveletek kifejezésekkel*<br>Algebrai kifejezések átalakításai, nevezetes szorzatok.<br>A hatványozás azonosságai.<br>Matematikai fogalmak fejlődése, permanencia-elv.<br>Gyökös kifejezések átalakításai.<br>Exponenciális és logaritmikus kifejezések átalakításai.<br>*Számelmélet*<br>Oszthatósági szabályok. Számolás maradékokkal.<br>Prímszámok.<br>Oszthatósági feladatok megoldása.<br>Tudjon $n$ alapú $(n \leq 9)$ számrendszerben felírt számokat összeadni és kivonni.<br>*Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek*<br>Lineáris és lineárisra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.<br>Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.<br>Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek.<br>Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.<br>Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.<br>Polinomok algebrája.<br>Paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek. | *Fizika; kémia*: számítási feladatok megoldása. |
| *Függvények, sorozatok, az analízis elemei*<br>*Függvények*<br>A függvény fogalma.<br>Függvények rendszerezése a definiáló kifejezés szerint: konstans, lineáris, egészrész, törtrész, másodfokú, abszolútérték, exponenciális, logaritmus, trigonometrikus függvények.<br>Függvények rendszerezése tulajdonságaik szerint.<br>Függvénytranszformációk.<br>Valós folyamatok elemzése függvénytani modellek szerint.<br>*Sorozatok, sorok*<br>A sorozat fogalma.<br>Számtani, mértani sorozat.<br>Rekurzióval megadott egyéb sorozatok. | *Informatika*: számítógépes programok használata függvények ábrázolására, vizsgálatára.<br><br>*Fizika*: Az analízis alkalmazásai a fizikában. A matematika és a fizika kölcsönhatása az analízis módszereinek |

| | |
|---|---|
| Sorozatok monotonitása, konvergenciája.<br>A végtelen mértani sor. Tudja meghatározni tizedestört alakban megadott racionális szám közönséges tört alakját.<br>*Analízis*<br>Függvények korlátossága és monotonitása.<br>Függvény határértéke, folytonossága.<br>Differenciálhányados, derivált függvény.<br>Differenciálisi szabályok.<br>L'Hospital-szabály.<br>Függvényvizsgálat differenciálás segítségével.<br>Szélsőérték-meghatározási módok.<br>A tanult függvények primitív függvényei.<br>Integrálási módszerek.<br>A határozott integrál.<br>Newton–Leibniz-tétel.<br>A határozott integrál alkalmazásai.<br>Improprius integrál. | kialakulásában. |
| *Geometria*<br>*Geometriai alapfogalmak*<br>Térelemek köcsönös helyzete, távolsága, szöge.<br>*Geometriai alakzatok, bizonyítások*<br>Nevezetes ponthalmazok.<br>Síkidomok, testek, tulajdonságaik.<br>Elemi sík- és térgeometriai tételek.<br>Bizonyítsa a húrnégyszögek és az érintőnégyszögek tételét, ismerje a tételek megfordítását. ismereteit alkalmazza feladatok megoldásában.<br>Bizonyítsa és alkalmazza feladatokban a kerületi és középponti szögek tételét és a kerületi szögek tételét.<br>Ismerje és alkalmazza a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételét.<br>*Geometriai transzformációk*<br>Egybevágósági és hasonlósági transzformációk, tulajdonságaik.<br>Szerepük a bizonyításokban és a szerkesztésekben.<br>Ismerje és alkalmazza a párhuzamos szelők tételét, a tétel megfordítását és a párhuzamos szelőszakaszok tételét.<br>Bizonyítsa és alaklmazza a belső szögfelező tételt.<br><br>*Vektorok, trigonometria, koordináta-geometria*<br>Vektor fogalma, műveletek a vektorok körében.<br>Matematikai fogalmak fejlődésének követése.<br>Vektorfelbontás, vektorok koordinátái.<br>Hegyesszög szögfüggvényei. Szinusz- és koszinusztétel.<br>A háromszög hiányzó adatainak kiszámolása.<br>Trigonometrikus azonosságok.<br>Az egyenes egyenletei, egyenletrendszere (síkban és térben).<br>A kör egyenletei.<br>A kúpszeletek definíciója, egyenleteik.<br>*Geometriai mértékek*<br>A hosszúság és a szög mértékei. Kiszámolási módjaik. | *Művészetek*: szimmetriák, aranymetszés.<br><br>*Informatika*: számítógépes geometriai programok használata. |

| | |
|---|---|
| A kétoldali közelítés módszere. A terület fogalma és kiszámítási módjai.<br>A felszín és térfogat fogalma és kiszámítási módjai.<br>Az integrálszámítás felhasználása alakzatok mértékének kiszámításához. | |
| *Valószínűségszámítás, statisztika*<br>Statisztikai alapfogalmak: módus, medián, átlag, szórás.<br>Eseményalgebra és műveleti tulajdonságai. Teljes eseményrendszer.<br>A matematika különböző területeinek öszekapcsolása: Boole-algebra.<br>Grafikonok, táblázatok, diagrammok készítése és olvasása.<br>Valószínűségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság.<br>A valószínűség kiszámítási módjai.<br>Feltételes valószínűség, várhtó érték<br>Mintavételi feladatok klasszikus modell alapján.<br>Szerepük a mindennapi életben.<br>A véletlen szabályszerűségei, a nagy számok törvénye.<br>A közvéleménykutatás elemei. | *Informatika*: táblázatkezelő, adatbázis-kezelő program használata.<br><br>*Fizika:* fizikai jelenségek valószínűség-számítási modellje. |
| *Motivációs témakörök*<br>Néhány matematikatörténeti szemelvény.<br>A matematikatörténet néhány érdekes problémájának áttekintése. (Pl. Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról.)<br>Matematikusokkal kapcsolatos történetek.<br>Matematika alapú játékok.<br>Logikai feladványok, konstrukciós feladatok.<br>A matematika néhány filozófiai kérdése.<br>A matematika fejlődésének külső és belső hajtóerői.<br>Néhány megoldatlan és megoldhatatlan probléma. | *Informatika*: könyvtárhasználat, internethasználat. |

| | |
|---|---|
| **A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén** | *Gondolkodási és megismerési módszerek*<br>– Halmazok számosságával kapcsolatos ismeretek áttekintése.<br>– A kombinatorikai problémák rendszerezése.<br>– Bizonyítási módszerek áttekintése.<br>– A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában.<br><br>*Számelmélet, algebra*<br>– A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete.<br>– A logaritmus fogalmának ismerete.<br>– A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben, probléma megoldása céljából.<br>– Exponenciális és logaritmusos egyenletek megoldása, ellenőrzése.<br>– Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása.<br>– Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése.<br>– A számológép biztos használata.<br><br>*Függvények, az analízis elemei* |

| | |
|---|---|
| | – Exponenciális-, logaritmus- és a trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása, jellemzése.<br>– Függvénytranszformációk.<br>– Exponenciális folyamatok matematikai modellje.<br>– A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok.<br>– Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése.<br>– Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése.<br>– A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával.<br>– Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása.<br><br>*Geometria*<br>– Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták.<br>– Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata.<br>– Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása.<br>– A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.<br>– Térbeli viszonyok, testek felismerése, geometriai modell készítése.<br>– Távolság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása.<br><br>*Valószínűség, statisztika*<br>– Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.<br>– A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módja.<br>– Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása. |

# Jahrgang 9/Ny

**Die Ziele des Vorbereitungjahres vom Aspekt unseres Faches:**

Die Schüler/Innen, die an dem Programm teilnehmen, **haben die 8 Klassen der Grundschule absolviert**, aber verfügen über ganz unterschiedliches Wissensniveau. Die inhomogene Zusammensetzung der Klasse gibt die Gelegenheit, dass die Schüler/Innen einander beim Lernen helfen.

Nach den Prinzipien des Programms sollen die Schüller/Innen kompetent sein, sich die Ausbildung in der Mittelschule qualitätvoll zu erwerben. Anstatt den Mathematiklehrstoff der Grundschule wieder zu unterrichten, soll der Schwerpunkt also an der Förderung der Fähigkeiten liegen. Die gründliche Wiederholung ist aber auch sehr wichtig.

**Fortschritt**

Wir möchten die Schüler/Innen aufgrund der oben genannten Grundprinzipien bilden. Im Vorbereitungsjahr wünschen wir sowohl den Schüler/Innen als auch ihren Eltern und Lehrern deutlich machen, was sie beim Mathematiklernen vom 9. Jahrgang auf sich nehmen müssen.

**Der Aufbau des Lehrplans im Vorbereitungsjahr** beachtet alle Erfordernisse des Rahmenlehrplans.

Bei der Zusammenstellung des Lehrplans haben wir uns bemüht, genug Zeit sowohl für die Wiederholung der Theorie als auch für die Beschäftigung mit den individuellen Bedürfnissen der Lerngruppe (Üben, Erweiterung und Vertiefung des Lehrstoffes) – was die Pädagogen für wichtig halten – zu geben.

Wir halten sowie die Herausbildung (die Verstärkung) des richtigen Zahlbegriffs und Operationsbegriffs, die Förderung (und adäquate Abfrage) der Zählkompetenz als auch die Betreuung des logischen und flexiblen Denkens für wichtig.

Auch im Lehrplan bekommen **der empirisch basierte Mathematikunterricht, die geführte Entdeckung** und die induktive Methode eine wichtige Rolle. Bedeutend ist noch, dass die Schüler/Innen die durch Erfahrungen erworbenen Kenntnisse altersgemäß formulieren, begreifen und sowohl innerhalb der Mathematik als auch in anderen Lehrfächern verwenden können.

Wir bevorzugen das flexible, disziplinierte Denken und die anspruchsvolle Problemlösung.

**Ziel**

Das wichtigste Ziel des Lehrplans gemäß dem Rahmenlehrplan ist die Erziehung auf flexibles, diszipliniertes Denken, das Entwickeln der Kreativität. Ein wichtiges Ziel und ein positives Motivationsmittel ist das zu zeigen, dass die Mathematik ein Teil der Kulturgeschichte ist und dass

die mathematischen Kenntnisse die bessere Erkennung der Welt ermöglichen. Die Verwendung der mathematischen Kenntnisse und das gut entwickelte Denken sichert das Verstehen und Erlernen anderer Fächer auf entsprechendem Niveau. Die Vertiefung oder Rückstand im Fach motiviert stark die Berufswahl.

Das wichtigste Ziel des Vorbereitungsjahres ist die mathematischen Kenntnisse auf sicherer Basis zu legen, die schon sichtbaren Richtungen der Berufswahl zu bestimmen, die individuelle Ziele und Aufgaben zu formulieren.

Im Lehrplan ist ein wichtiges Ziel, die **durch Aktivitäten gereiften Begriffe herauszubilden**, später genau zu wissen, die Kenntnisse zusammengesetzt zu verwenden und die altersgemäße mathematische Sprache immer genauer zu benutzen.

Die Denkmethoden müssen im Sinne der oben Beschriebenen in allen Themenkreisen der Mathematik ständig vorkommen.

**Erforderung**

- Das sichere Wissen des Lehrstoffs der Grundschule erhöhtem Niveau.

- Die Festmachung, Systematisierung und Zusammenfassung der Kenntnisse und die ergebnisreiche Vorbereitung auf das Abitur geeignetem Niveau, dazu noch die Basierung des erfolgreichen Studiums in der Oberstufe.

**Bewertung**

- Die kontinuierliche Bewertung der Arbeit der Schüler/Innen im Unterricht, die Kontrollierung der Hausaufgaben, kürzere schriftliche und mündliche Abfrage.

- Die Aktivitäten über den Unterricht hinaus werden auch bewertet: Vorträge über historische Zusammenhänge, Modellbildungen, Fragen der Integration in andere Fächer, Arbeit im Fachzirkel, Wettbewerbsergebnisse.

**Übersichtstabelle der Themenkreise:**

| Name des Themenkreises | Stundenzahl |
|---|---|
| **Mengen** | 10 |
| **Mathematische Logik** | 10 |
| **Zahlenmengen, Operationen** | 8 |
| **Potenz** | 10 |
| **Ausdrücke mit Buchstaben (und ihre Verwendung bei der Lösung von Gleichungen und bei der Funktionsdarstellung)** | 10 |
| **Zahlentheoretische Kenntnisse** | 6 |
| **Proportionalität, Prozentrechnung** | 12 |
| **Der Begriff der Funktion, Funktionseigenschaften** | 16 |

| | |
|---|---|
| **Geometrische Grundkenntnisse** | 8 |
| **Dreiecke - 1** | 8 |
| **Vierecke, Polygone** | 10 |
| **Gesamte Stundenzahl:** | 108 |

## THEMENKREIS: Mengen

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 10 Stunden**

### LERNERGEBNISSE

**Das Lernen des Themenkreises trägt dazu bei, dass die Schüler/Innen am Ende der Erziehungs- und Unterrichtsperiode:**

- die Zusammenhänge zwischen Mengenoperationen und logischen Operationen sehen;
- die Elementenzahl endlicher Mengen bestimmen;
- das Prinzip des logischen Siebs verwenden.

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- gegebene Mengen in disjunkte Teilmengen zerlegen, klassifizieren;
- Mengen auf verschiedenen Weisen angeben;
- mit Mengen Operationen durchführen, Mengen darstellen und interpretieren.

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Das Zerlegen gegebener Mengen in disjunkte Teilmengen, Beispiele zur Anwendung innerhalb der Mathematik, in anderen Fächern und im Alltagsleben
- Das Angeben einer Menge mit einer Vorschrift oder mit der Aufzählung der Elemente
- Grundmenge und Komplementärmenge. Die Bewusstmachung, dass es keine Komplementärmenge ohne eine Grundmenge gibt
- Die Darstellung und Interpretation der Beziehungen zwischen Mengen
- Die Bildung, Darstellung und Interpretation von Schnittmengen, Vereinigungsmengen, Differenzmengen und Komplementärmengen
- Die Lösung von Aufgaben in Bezug auf die Elementenzahl von zwei oder drei Mengen mit Hilfe des logischen Siebes
- Punktmengen, angegeben mit Abstand; Punktmengen mit angegebenen Eigenschaften
- Anschauliches Bild über unendliche Mengen

### BEGRIFFE:

Grundmenge, Teilmenge, leere Menge, Gleichheit der Mengen, Venn-Diagramm; Mengenoperationen: Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Differenzmenge, Komplementärmenge; disjunkte Mengen, Elementenzahl der Mengen, das logische Sieb

### Empfohlene Tätigkeiten

- Sammeln von Elementen angegebener Eigenschaften aus dem Alltagsleben, aus anderen Lehrfächern oder aus der Mathematik von einer konkret oder digital veranschaulichten Grundmenge
- Die Bestimmung der Bildungsaspekte einer Teilmenge bei konkreten Teilmengen
- Das Herausfinden von berühmten Personen aus der Geschichte, aus der Kunst, aus Wissenschaften und aus dem Sport aufgrund verschiedener Eigenschaften
- „Wer bin ich?”-Spiel
- „Das unendliche Hotel” als Modell

- Entdeckung der eindeutigen Zuordnung zwischen Elementen von Mengen mit abzählbar unendlicher Mächtigkeit, zum Beispiel: Die Mächtigkeit der Menge von positiven, natürlichen Zahlen ist gleich der Mächtigkeit der Menge von positiven geraden Zahlen.

## THEMENKREIS: Mathematische Logik

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 10 Stunden**

### Lernergebnisse

**Das Lernen des Themenkreises trägt dazu bei, dass die Schüler/Innen am Ende der Erziehungs- und Unterrichtsperiode:**

– die Zusammenhänge zwischen den Mengenoperationen und den logischen Operationen sehen;
– den logischen Wert von einfachen „wenn..., dann..." und „dann und nur dann" Aussagen feststellen;
– einfache Aussagen begründen und Thesen beweisen können.

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- über gegebene Aussagen entscheiden, ob sie wahr oder falsch sind;
- die Operation der Negation in einfachen Aufgaben verwenden;
- den logischen Begriff von „und", beziehungsweise (erlaubende und ausschließende) „oder" kennen und verwenden;
- die Umkehrung gegebener Aussage formulieren;
- die Begriffe „jeder" und „es gibt" richtig verwenden.

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Der Begriff des mathematischen Beweises
- Die Feststellung des logischen Wertes von Aussagen (wahr oder falsch)
- Die Verwendung der Negation einer Aussage in einfachen Aufgaben
- Die Kenntnis und Verwendung der logischen Bedeutung von „nicht", „und", erlaubende „oder" und ausschließende „oder" in Aufgaben innerhalb und außerhalb der Mathematik.
- Die Feststellung und Begründung des logischen Wertes der Aussagen der Typ „jeder" und „es gibt" in einfachen Fällen
- Die Formulierung der Umkehrung gegebener Aussagen
- Die Feststellung des logischen Wertes der Aussagen von einfachen „wenn..., dann..." und „dann und nur dann" Aussagen
- Strategische und logische Spiele

### BEGRIFFE

These, Beweis, wahr-falsch; „nicht", „und", „oder", „entweder... oder", „wenn...dann", „dann, und nur dann"

### Empfohlene Tätigkeiten

- „Verhandlung vor Gericht", wo die Schüler/Innen eine Aussage als Verteidiger oder Ankläger begründen oder widerlegen
- Spiele, wie „Was behauptet der Inselbewohner?", „Wer war der Täter, wenn...?" in Gruppenarbeit

- Spiele, die die logische Fertigkeit entwickeln, wie zum Beispiel „Einstein-Rätsel"
- Strategische Spiele, wie Nim-Spiele, Brettspiele
- Spiele, die die bewusste finanzielle Planung fördern

## THEMENKREIS: Zahlenmengen, Operationen

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 8 Stunden**

### Lernergebnisse

**Das Lernen des Themenkreises trägt dazu bei, dass die Schüler/Innen am Ende der Erziehungs- und Unterrichtsperiode:**

- die mathematischen Bezüge des Aufbaus der Zahlenmengen der natürlichen bis zu den reellen Zahlen kennen;
- Beispiele für irrationelle Zahlen kennen.

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- die Rechengesetze Kommutativität, Assoziativität, Distributivität in verschiedenen Rechensituationen richtig verwenden;
- die rationellen Zahlen in Dezimalbruch- und gewöhnliche Bruchform umsetzen;
- den Zusammenhang zwischen den reellen Zahlen und der Zahlengerade kennen;
- die Begriffe Absolutbetrag, Gegenteil und Kehrwert kennen und verwenden;
- die ausgerechneten Ergebnisse ungefähr schätzen, und so die Lösung kontrollieren;
- mit den annähernden Formen der reellen Zahlen rechnen und richtig runden.

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Die kennengelernten Zahlenmengen: natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationelle Zahlen.
- Die Menge der reellen Zahlen.
- Die Rechengesetze (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität) die richtige Anwendung der Klammern
- Die Umsetzung der Dezimalbrüche in gewöhnliche Bruchform und umgekehrt
- Die Darstellung der irrationellen Zahlen
- Die Position der rationellen Zahlen auf der Zahlengerade
- Die Kenntnis und Verwendung des Begriffs von offenen und abgeschlossenen Intervallen
- Die Feststellung des Betrags, Gegenteils und Kehrwerts von Zahlen
- Das vorherige Schätzen und Kontrolle der Größenordnung der Ergebnisse von mit dem Taschenrechner gelöster Rechnungen
- Das Runden von reellen Zahlen auf angegebenen Nachkommastellen
- Das verständnisvolle Runden von reellen Zahlen in praktischen Situationen

### BEGRIFFE

Rationelle Zahlen, irrationelle Zahlen, reelle Zahlen, offenes Intervall, abgeschlossenes Intervall, Betrag, Gegenteil, Kehrwert

### Empfohlene Tätigkeiten

- Das Lernen der richtigen Benutzung des Taschenrechners, zum Beispiel: Reihenfolge der Operationen, Klammern
- Die Kontrolle der schriftlich gelösten Operationen mit dem Taschenrechner
- Das Annähern der Zielzahl mit angegebenen Ziffern durch Benutzung der Operationszeichen und Klammern

- Vortrag der Schüler/Innen über die Geschichte der Herausbildung des Stellenwertsystems
- Adäquates Runden bei den Messungen in dem Klassenraum oder in dessen Umgebung
- Die Analyse der Folgen der Messungsfehler bei gegebenen Messungen.

## THEMENKREIS: Potenz

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 10 Stunden**

### Lernergebnisse

**Das Lernen des Themenkreises trägt dazu bei, dass die Schüler/Innen am Ende der Erziehungs- und Unterrichtsperiode:**

- den Begriff der n-ten Wurzel kennen und verwenden;
- den Begriff der Potenz mit ganzem und rationalem Exponenten und die Potenzgesetze kennen und verwenden.

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- den Begriff der Potenz mit ganzem Exponenten und die Potenzgesetze kennen und verwenden;
- den Begriff der Normalform kennen und verwenden.

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Potenzieren der reellen Zahlen mit ganzen Exponenten
- Potenzieren mit 0 und mit negativen Exponenten, das Permanenzprinzip
- Observierung und Entdeckung der Potenzgesetze
- Beweisen der Potenzgesetze mit konkreter Basis und beliebigem positivem, ganzem Exponenten
- die Normalform der Zahlen
- Rechnen mit Hilfe von der Normalform

### BEGRIFFE

Basis, Exponent, Normalform

### Empfohlene Tätigkeiten

- Projektarbeit: wievielmal kann man ein großes Blatt Papier falten? Recherchieren im Internet; Durchführung eines Experiments zum Beispiel mit einer ganzen Toilettenpapierrolle.
- Bestimmen der Wahrheitsgehalt von Artikeln im Internet, die sehr kleine oder sehr große Zahlen beinhalten, in Partner- oder Gruppenarbeit

## THEMENKREIS: Ausdrücke mit Buchstaben (und ihre Verwendung bei der Lösung von Gleichungen und bei der Funktionsdarstellung)

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 10 Stunden**

### Lernergebnisse

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- Operationen mit algebraischen Ausdrücken lösen;
- einfache algebraische Rechengesetze kennen und verwenden;
- algebraische Ausdrücke mit Verwendung von Zusammenfassen, Umformung in Produktform, binomischen Formeln umformen.

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Operationen mit einfachen algebraischen Ausdrücken: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenz von eingliedrigen Ausdrücken
- Übersetzung auf die „Sprache der Algebra”
- Einsetzungswert der Ausdrücke
- Kenntnis und Verwendung der Operationsgesetze während der Lösung von Gleichungen
- Kenntnis und Verwendung der binomischen Formeln $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ und $(a + b)(a - b)$ zum Beispiel in Aufgaben der Teilbarkeit, bei der Lösung von Gleichungen und Darstellung der Funktionen
- Umformung von einfachen Polynomen zweiten Grades durch Ergänzung auf Quadratform
- Umformung von algebraischen Ausdrücken mit Verwendung der Zusammenfassung, der Umformung in Produktform und der binomischen Formeln.

### BEGRIFFE

Summe, Glied, Produkt, Faktor, gleichartige Terme, Koeffizient, Quadratform, Polynom

### Empfohlene Tätigkeiten

- Die algebraische Erklärung vom Spiel: „Denk an eine Zahl und ich werde sie erraten” und von mathematischen Zaubertricken
- Geometrische Modellierung der Operationen mit algebraischen Ausdrücken
- Geometrische Darstellung der binomischen Formeln.
- „Rechentricks” mit Hilfe der binomischen Formeln, zum Beispiel die Kopfrechnung des Quadrats von zweistelligen Zahlen bzw. des Ergebnisses der Multiplikation folgendes Types: $99 \cdot 101$

## THEMENKREIS: ZAHLHENTHEORETISCHE KENNTNISSE

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 6 Stunden**

### Lernergebnisse

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- die grundlegenden Begriffe der Teilbarkeit kennen und verwenden;
- zusammengesetzte Zahlen in Primfaktoren zerlegen
- den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei natürlichen Zahlen bestimmen und diese in einfachen praktischen Aufgaben verwenden;
- die Teilbarkeitsregeln kennen und verwenden;

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen aus der Primfaktorzerlegung
- Verwendung zusammengesetzter Teilbarkeitsregeln

### BEGRIFFE

natürliche Zahl, ganze Zahl, rationelle Zahl, irrationelle Zahl, reelle Zahl, teilerfremde Zahlen

## THEMENKREIS: Proportionalität, Prozentrechnung

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 12 Stunden**

### Lernergebnisse

**Das Lernen des Themenkreises trägt dazu bei, dass die Schüler/Innen am Ende der Erziehungs- und Unterrichtsperiode:**

- die Maßeinheiten der Länge, des Flächeninhalts, des Volumens, des Fassungsvermögens, der Zeit und die Umrechnungsregeln kennen. Abgeleitete Maßeinheiten umrechnen.
- die Begriffe des Grundwerts, Prozentwerts, Prozentsatzes, Prozentpunktes kennen und verwenden.

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- die direkte und indirekte Proportionalität kennen und verwenden.

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Die Kenntnis des Begriffs von direkter und indirekter Proportionalität und ihre Verwendung bei der Lösung von praktischen Problemen
- Die Erkennung und Anfertigung des Graphen von direkter und indirekter Proportionalität
- Beispiele für weder direkte noch indirekte Proportionalitäten (quadratisch, wurzelisch)
- Beispiele aus dem Alltagsleben für Mengenpaare, die sich in der gleichen, oder in umgekehrter Richtung verändern
- Die Lösung von Prozentrechnungsaufgaben, die sich zu alltäglichen Situationen (z.B.: Einkommen in dem Haushalt, Ausgaben, finanzielle Begriffe, wirtschaftliche Prozesse) oder zu anderen Fächern knüpfen

### BEGRIFFE

direkte Proportionalität, indirekte Proportionalität, Grundwert, Prozentwerts, Prozentsatz

### Empfohlene Tätigkeiten

- Die Lösung von zusammengesetzten, alltagsnahen Aufgaben in Gruppenarbeit, falls nötig mit Hilfe von Funktionsgraphen
- Analyse der Haushaltsrechnungen, der Zusammenhang zwischen den Einheitspreisen und der zu bezahlenden Summen

## THEMENKREIS: Der Begriff der Funktion, Funktionseigenschaften

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 16 Stunden**

### Lernergebnisse

**Das Lernen des Themenkreises trägt dazu bei, dass die Schüler/Innen am Ende der Erziehungs- und Unterrichtsperiode:**

- die mit Formeln angegebenen Funktionen konventionell und mit digitalen Mitteln darstellen
- zu angegebenem Element der Wertevorrat die Elemente des Definitionsbereichs finden, zu denen die Funktion den angegebenen Wert zuordnet.

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- im Alltagsleben vorkommende Zuordnungen angeben;
- anhand einer angegebenen Formel Einsetzungswert rechnen on sie in Tabellen ordnen;
- die zusammengehörenden Werte einer durch Tabelle angegebenen Funktion ins Koordinatensystem darstellen;
- die grundlegenden Eigenschaften einer Funktion vom Funktionsgraphen feststellen.

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Beobachtung von alltäglichen Zuordnungen, Formulierung ihrer Eigenschaften: eindeutig, eineindeutig
- Angabe der Funktion, Kenntnis von grundlegenden Begriffen der Funktionslehre
- Bestimmung von Funktionswerten und ihre Ordnung in eine Tabelle
- Darstellung der Funktionen anhand der Tabelle
- Anwendung der Funktionen für Charakterisierung von reellen, alltäglichen Situationen und für Lösung von praktischen Problemen
- Die Feststellung des Definitionsbereichs, des Wertevorrats, des Minimums, des Maximums und der Nullstelle, beziehungsweise die Ablesung der Monotonität anhand des Funktionsgraphen
- Die Eigenschaften und Graphen der folgenden elementaren Funktionen: lineare Funktion, quadratische Funktion, Betragsfunktion, die Funktion, die die indirekte Proportionalität beschreibet
- Einfache Funktionstransformationen mit elementaren Funktionen: $f(x) + c$, $f(x + c)$, $c \cdot f(x)$, $|f(x)|$
- Ablesung der Zuordnungsvorschriften von linearen Funktionen anhand des Funktionsgraphen
- Die Bestimmung von $f(x) = c$ mit Hilfe von $x$, und dessen Anwendung in praktischen Problemen im Fall von einfachen Funktionen
- Die Umkehrung der eineindeutigen Zuordnung und die Darstellung der umgekehrten Zuordnung

### BEGRIFFE

eindeutige Zuordnung, eineindeutige Zuordnung, Definitionsbereich, Bildmenge, Wertevorrat, Einsetzungswert, Extremwert, Nullstelle, fallend, steigend

### Empfohlene Tätigkeiten

- Analyse von zusammengesetzten, reellen Situationen (wie demographische Fragen oder finanzielle Aufgaben) betroffenen Graphen in Gruppenarbeit
- Durchführung von Messungen in alltäglichen Situationen mit sich zeitlich verändernden Vorgängen und die Darstellung der gemessenen Daten in Koordinatensystem (zum Beispiel Temperatur)
- Darstellung und Analyse von Graphen, die sich zum alltäglichen Leben der Schüler/Innen verknüpfen (zum Beispiel ein Weg-Zeit-Diagramm über den Schulweg)
- Lösung von einfachen, mit quadratischer Funktion darstellbaren, praktischen Extremwertaufgaben in Gruppenarbeit, zum Beispiel die Messung und Beobachtung der Daten des Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt, das mit einem Schnur angegebener Länge umgeschlossen wird.

- Darstellung der Funktionen mit Hilfe von digitalen Mitteln
- Rätselspiel mit den Begriffen zu den Funktionen
- Lösung von Textaufgaben auf graphischem Weg
- Die annähernde Lösung von Gleichungen auf graphischem Weg, mit Hilfe von digitalen Mitteln, die auf algebraischem Weg nicht, oder nur sehr schwer zu lösen sind.

## THEMENKREIS: GEOMETRISCHE GRUNDKENNTNISSE

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 8 Stunden**

### Lernergebnisse

**Das Lernen des Themenkreises trägt dazu bei, dass die Schüler/Innen am Ende der Erziehungs- und Unterrichtsperiode:**

- die gegenseitige Lage, Entfernung und Neigungswinkel von den Raumelementen kennen und in Aufgaben verwenden;
- die Verknüpfungen der verschiedenen Bereiche der Mathematik erkennen.

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- die Begriffe des Punktes, der Geraden, der Ebene (der Raumelemente) und des Winkels kennen und verwenden;
- die Eigenschaften der bemerkenswerten Winkelpaare kennen und verwenden.
- die Grundkonstruktionen kennen und diese mit traditionellen oder mit digitalen Mitteln durchführen.

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Die Verwendung der folgenden Distanzen auf der Ebene: zwei Punkte, Punkt und Gerade, zwei Geraden
- Die Kenntnis und Verwendung der gegenseitigen Lage von zwei Geraden
- Die Kenntnis und Verwendung der Eigenschaften von bemerkenswerten Winkelpaaren: Komplementärwinkel Nebenwinkel, Ergänzungswinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel, Wechselwinkel
- Die Kenntnis der Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende und deren Eigenschaften als Punktmengen
- Die Vorbereitung der Anwendung von einem dynamischen, geometrischen Software und ihre Verwendung
- Die Durchführung von Grundkonstruktionen mit traditionellen oder mit digitalen Mitteln in Euklidischer Weise: Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Konstruktion von senkrechten und parallelen Geraden, das Kopieren von Winkeln

### BEGRIFFE

Punkt, Gerade, Ebene, Winkelbereich, Beugungswinkel, parallel, senkrecht, Komplementärwinkel, Nebenwinkel, Ergänzungswinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel, Wechselwinkel, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende

### Empfohlene Tätigkeiten

- Die Angabe der gegenseitigen Lage von „Geraden" im Klassenraum oder in der Umgebung des Klassenraums und die Messung der Distanz von ihnen.

- Die Bestimmung und Schätzung der wahren Distanzen auf einer Landkarte, die ausschließlich einen Maßstab als zahlenmäßige Datei enthält
- Das Suchen von Orten, die von gegebenen Orten in (annähernd) gleichen Entfernung liegen auf einer Landkarte, die ausschließlich einen Maßstab als zahlenmäßige Datei enthält

## THEMENKREIS: DREIECKE -1

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 8 Stunden**

### Lernergebnisse

**Das Lernen des Themenkreises trägt dazu bei, dass die Schüler/Innen am Ende der Erziehungs- und Unterrichtsperiode:**

- das Grundprinzip der Messung kennen und sie im Fall von konkreten Grund- und abgeleiteten Mengen verwenden;
- die Maßeinheiten von der Länge, vom Flächeninhalt, vom Volumen, vom Rauminhalt, von der Zeit und die Umrechnungsgesetze kennen. Abgeleitete Maßeinheiten umrechnen;
- bei ebenen- und raumgeometrischen Aufgaben die Antwort in der adäquaten Maßeinheit angeben;
- den Flächeninhalt von Dreiecken berechnen.

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- das Verhältnis der Seiten, der Winkel, der Seiten und Winkel eines Dreiecks; beziehungsweise die Eigenschaften der speziellen Dreiecke kennen und verwenden;
- den Satz des Pythagoras und seine Umkehrung kennen und verwenden.

### Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Die Gruppierung der Dreiecke nach Seiten und Winkeln
- Die Kenntnis und Verwendung der grundlegenden Zusammenhänge zwischen den Seiten, der Winkel und der Seiten und Winkel eines Dreiecks
- Die Kenntnis und Verwendung der Eigenschaften von speziellen Dreiecken, wie regelmäßige, gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke
- Die Kenntnis und Verwendung des Satzes des Pythagoras und seine Umkehrung
- Der Beweis des Satzes des Pythagoras
- Die Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks

### BEGRIFFE

regelmäßiges Dreieck, gleichschenkliges Dreieck, rechtwinkliges Dreieck

### Empfohlene Tätigkeiten

- Das Zerlegen von konkreten Figuren in anderen Figuren in Partner- oder Gruppenarbeit
- Das Zerlegen der Quadrate, die auf die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert wurden, gemäß des Satzes des Pythagoras mit Hilfe von pythagoreischen Tangrammen oder einer dynamischen geometrischen Software

## THEMENKREIS: VIERECKE, POLYGONE

**EMPFOHLENE STUNDENZAHL: 10 Stunden**

## Lernergebnisse

**Das Lernen des Themenkreises trägt dazu bei, dass die Schüler/Innen am Ende der Erziehungs- und Unterrichtsperiode:**

- das Grundprinzip der Messung kennen und sie im Fall von konkreten Grund- und abgeleiteten Mengen verwenden;
- die Maßeinheiten von der Länge, vom Flächeninhalt, vom Volumen, vom Rauminhalt, von der Zeit und die Umrechnungsgesetze kennen. Abgeleitete Maßeinheiten umrechnen;
- bei ebenen- und raumgeometrischen Aufgaben die Antwort in der adäquaten Maßeinheit angeben;
- die Eigenschaften der speziellen Vierecke kennen und verwenden; ihren Flächeninhalt berechnen;
- den Flächeninhalt von Polygonen durch Zerlegung berechnen.

**Als Erfolg des Lernens dieses Themenkreises können die Schüler/Innen:**

- den Begriff des regelmäßigen Polygons kennen und verwenden; die Summe der Innen- bzw. Außenwinkel eines konvexen Polygons ausrechnen.

## Aufgaben und Kenntnisse zum Entwickeln

- Die Kenntnis der Eigenschaften von speziellen Vierecken (Trapez, gleichschenkliges Trapez, Parallelogramm, Drachenviereck, Rhombus, Rechteck, Quadrat) und die Berechnung ihres Flächeninhaltes
- Die Kenntnis, der Beweis und die Verwendung der Sätze für die Berechnung der Anzahl der Diagonalen, bzw. der Summe der Innen- und Außenwinkel von konvexen Polygonen
- Die Kenntnis des Begriffs von regelmäßigen Polygonen
- Der Flächeninhalt der regelmäßigen Polygone durch Zerlegung

**BEGRIFFE**

Trapez, gleichschenkliges Trapez, Parallelogramm, Drachenviereck, Rhombus, Rechteck, Quadrat, konvexes Polygon, regelmäßiges Polygon

## Empfohlene Tätigkeiten

- Die Entdeckung der Formel für die Bestimmung vom Flächeninhalt verschiedener spezieller Vierecke durch Zerlegung
- Die Entdeckung der Sätze über die Summe der Innen- und Außenwinkel und ihre Illustration durch Zerlegung, Faltung oder mit Hilfe von einer dynamischen, geometrischen Software
- Projektarbeit: die maßstabgetreue Anfertigung des Grundrisses einer Wohnung oder der Schule