Artúr király, Zrínyi Ilona és William Burnside,

avagy hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat

Ágoston István, ELTE TTK

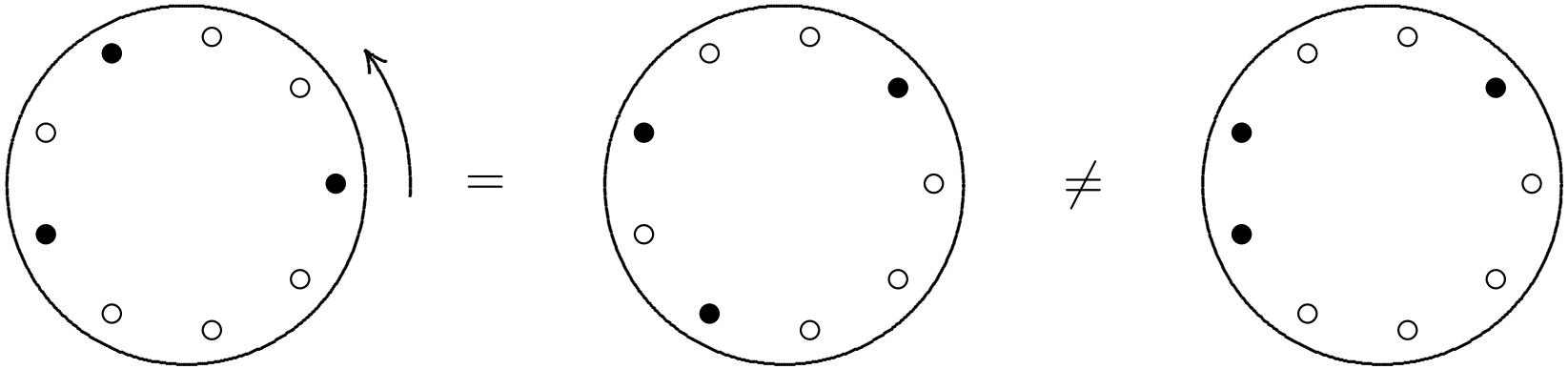
istvan.agoston@ttk.elte.hu

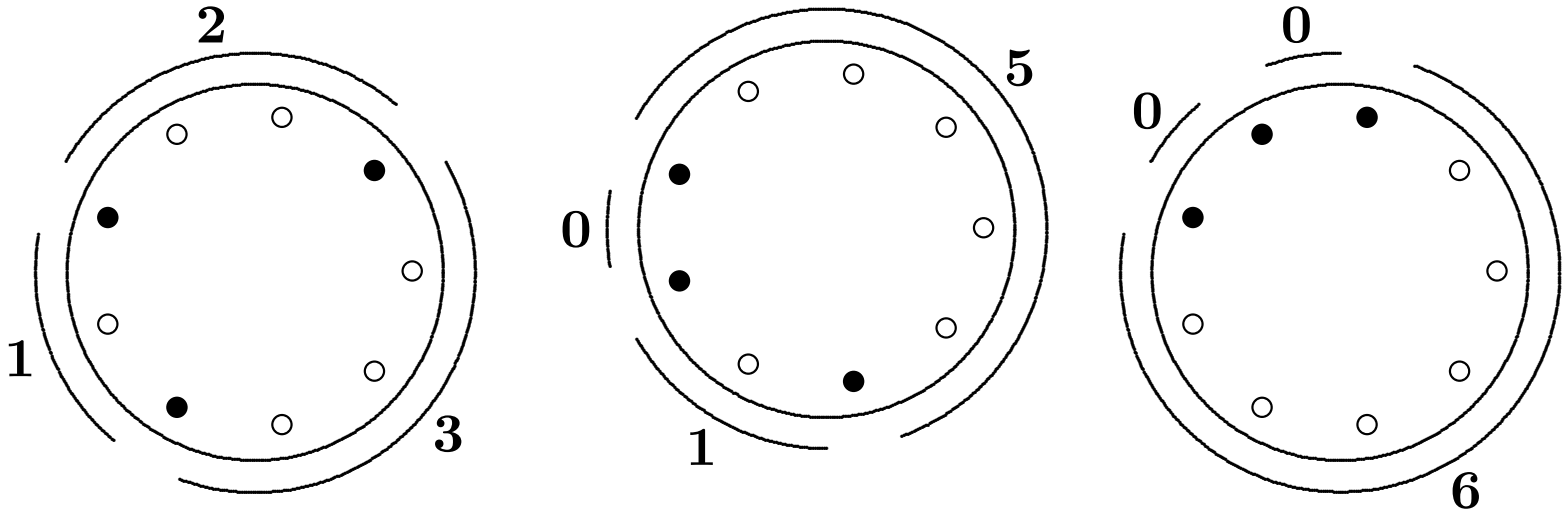
1. Feladat: Artúr király udvarába látogatnak a fekete lovagok (szám szerint hárman), és le kellene ültetni őket a kerekasztal köré, Artúr király lovagjai közé (ők hatan vannak). A terítékeknél a fekete lovagoknak fekete serleg jár, a hazai „csapatnak" ezüst színű. Hányféleképpen tudjuk előre megteríteni az asztalt, ha csak a „lényegesen különböző terítéseket" számoljuk (azaz a forgatással egymásba vihetőket azonosnak tekintjük)?

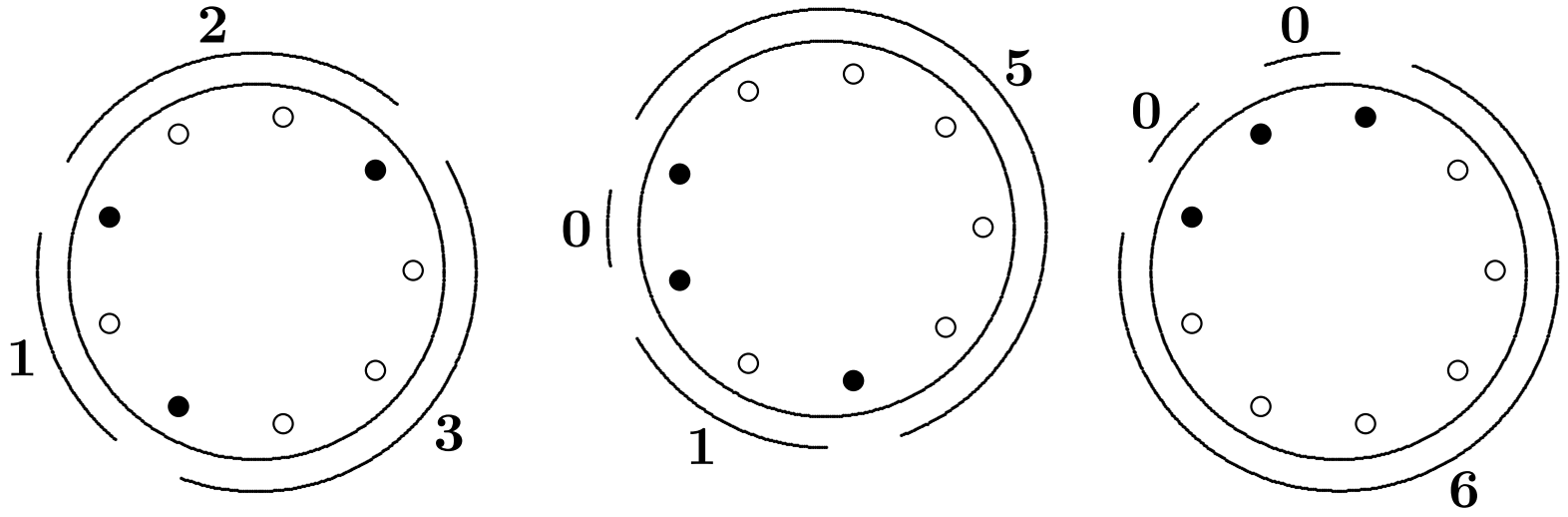
Egy adott ültetéssel azonosnak tekintett **ültetések** = **ültetési minta**

1. Feladat: Artúr király udvarába látogatnak a fekete lovagok (szám szerint hárman), és le kellene ültetni őket a kerekasztal köré, Artúr király lovagjai közé (ők hatan vannak). A terítékeknél a fekete lovagoknak fekete serleg jár, a hazai „csapatnak" ezüst színű. Hányféleképpen tudjuk előre megteríteni az asztalt, ha csak a „lényegesen különböző terítéseket" számoljuk (azaz a forgatással egymásba vihetőket azonosnak tekintjük)?

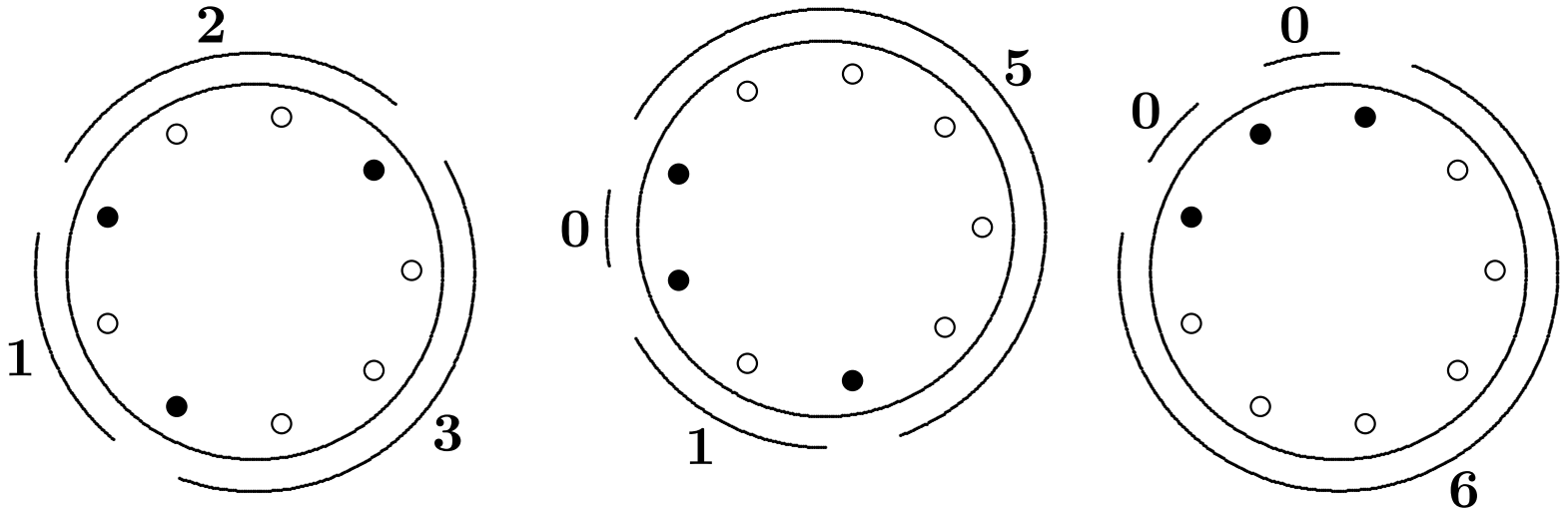
Egy adott ültetéssel azonosnak tekintett **ültetések** = **ültetési minta**




2
1
3
5
0
1
0
0
6

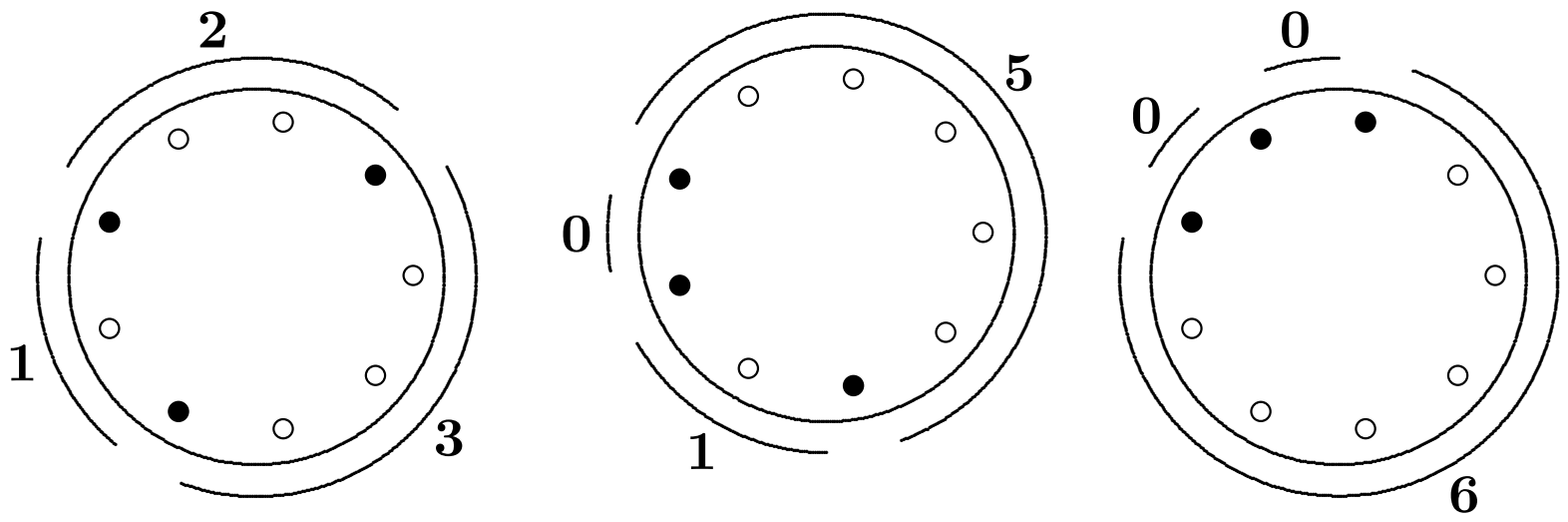


$(6,0,0)$	$\begin{matrix}(5,1,0)\\(5,0,1)\end{matrix}$	$\begin{matrix}(4,2,0)\\(4,0,2)\end{matrix}$	$(4,1,1)$	$(3,3,0)$	$\begin{matrix}(3,2,1)\\(3,1,2)\end{matrix}$	$(2,2,2)$



$(6,0,0)$	$(5,1,0)$ $(5,0,1)$	$(4,2,0)$ $(4,0,2)$	$(4,1,1)$	$(3,3,0)$	$(3,2,1)$ $(3,1,2)$	$(2,2,2)$

Ez összesen **10 különböző ültetési minta**.



$(6,0,0)$	$(5,1,0)$ $(5,0,1)$	$(4,2,0)$ $(4,0,2)$	$(4,1,1)$	$(3,3,0)$	$(3,2,1)$ $(3,1,2)$	$(2,2,2)$

Ez összesen **10 különböző ültetési minta**.

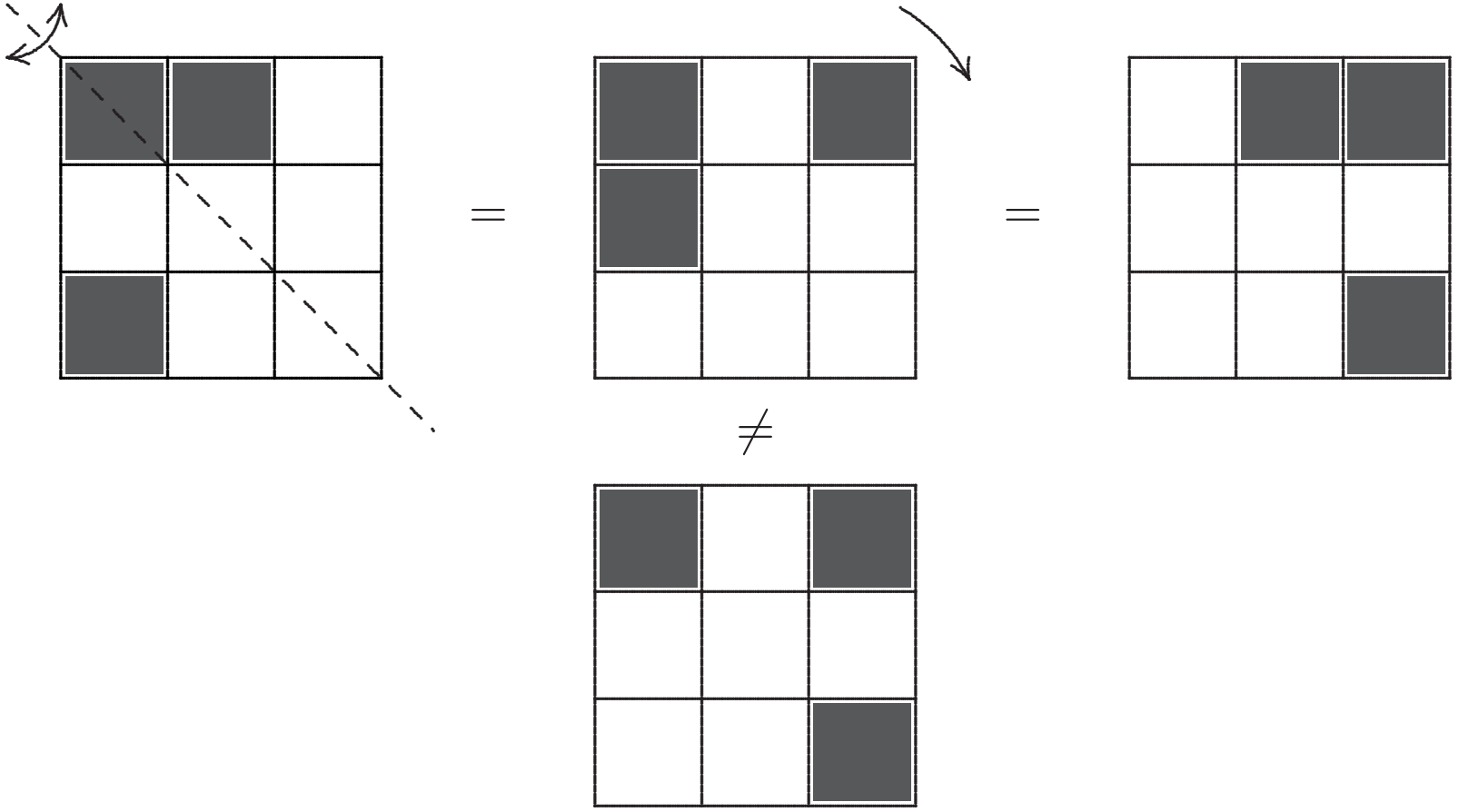
Ha a tükrözötteket is azonosnak tekintjük: **7 különböző ültetési mintát** kapunk.

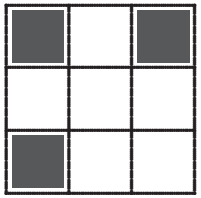
2. Feladat: Hányféleképpen tudjuk feketére satírozni egy 3×3-as négyzetháló (táblázat) három kis négyzetét, ha azonosaknak tekintjük azokat a satírozásokat, amelyeket forgatással és/vagy tükrözéssel megkaphatunk egymásból?

Egy adott satírozással azonosnak nevezett **satírozások** = **satírozási minta**

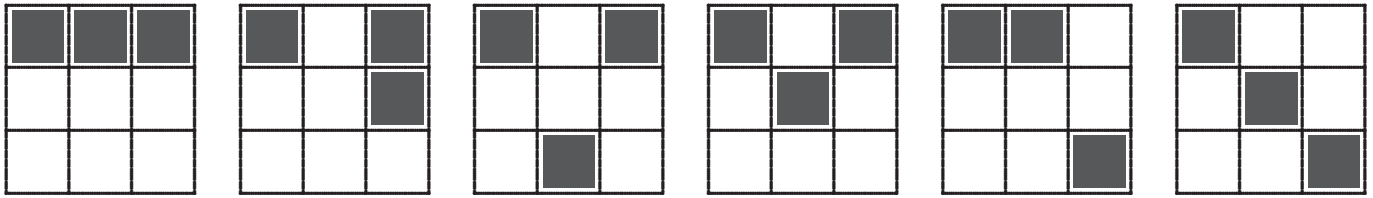
2. Feladat: Hányféleképpen tudjuk feketére satírozni egy 3×3-as négyzetháló (táblázat) három kis négyzetét, ha azonosaknak tekintjük azokat a satírozásokat, amelyeket forgatással és/vagy tükrözéssel megkaphatunk egymásból?

Egy adott satírozással azonosnak nevezett **satírozások** = **satírozási minta**

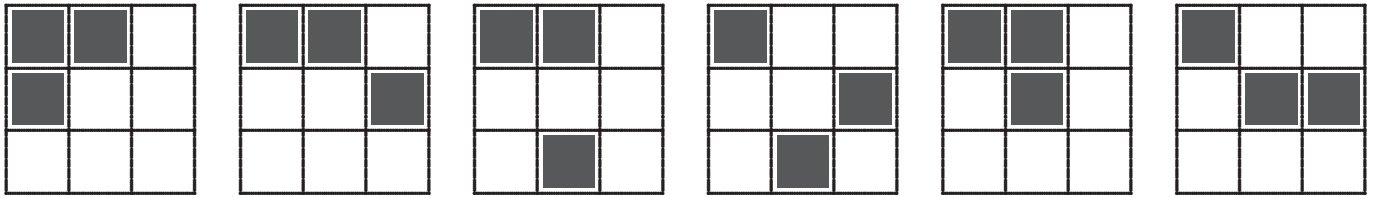




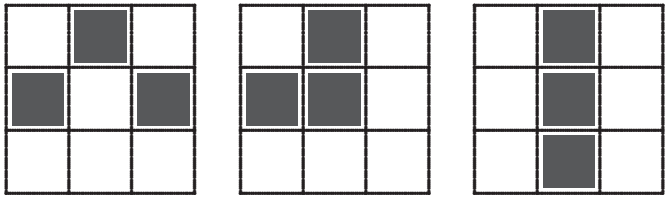
3 négyzet a sarokból



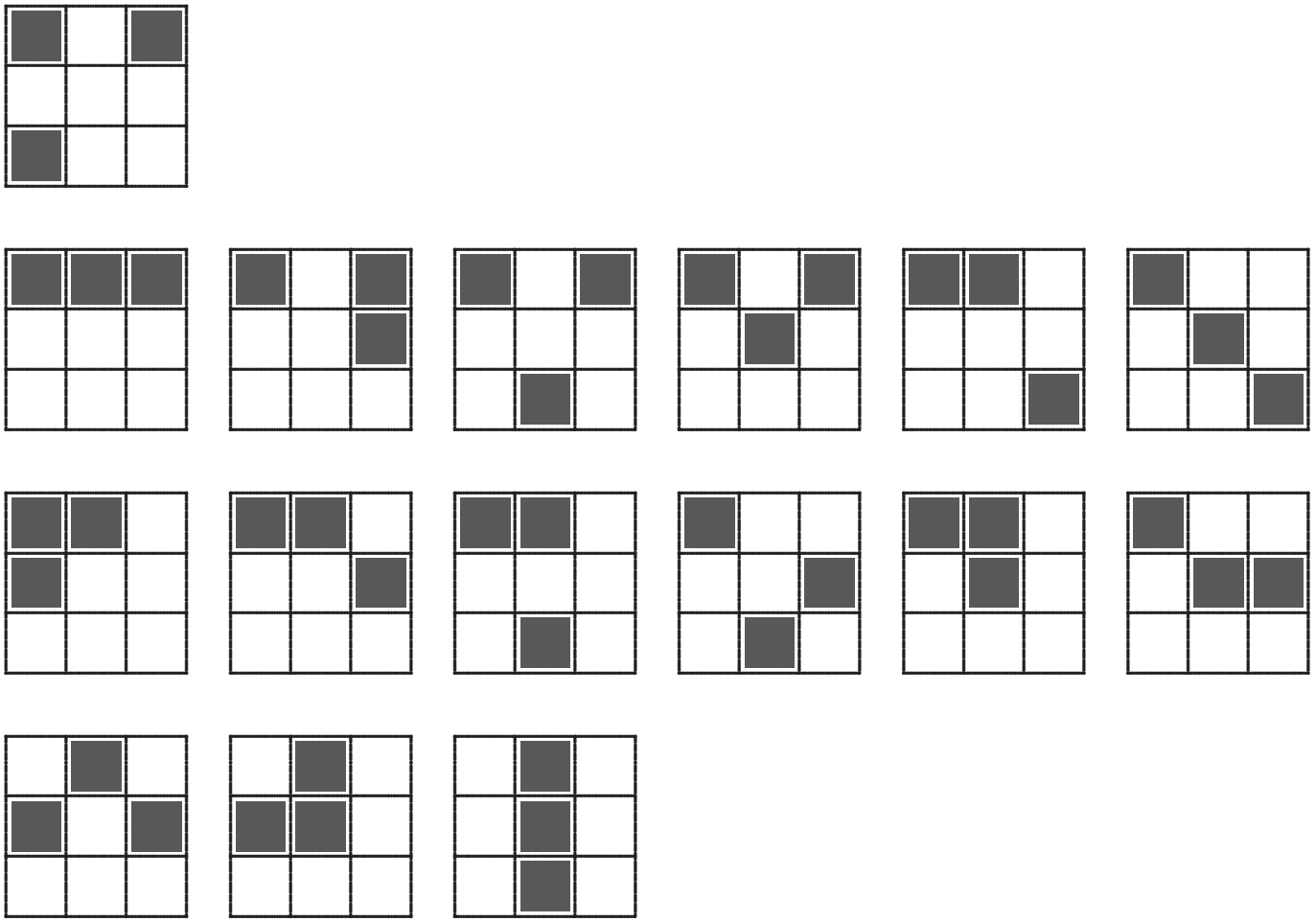
2 négyzet a sarokból



1 négyzet a sarokból



0 négyzet a sarokból



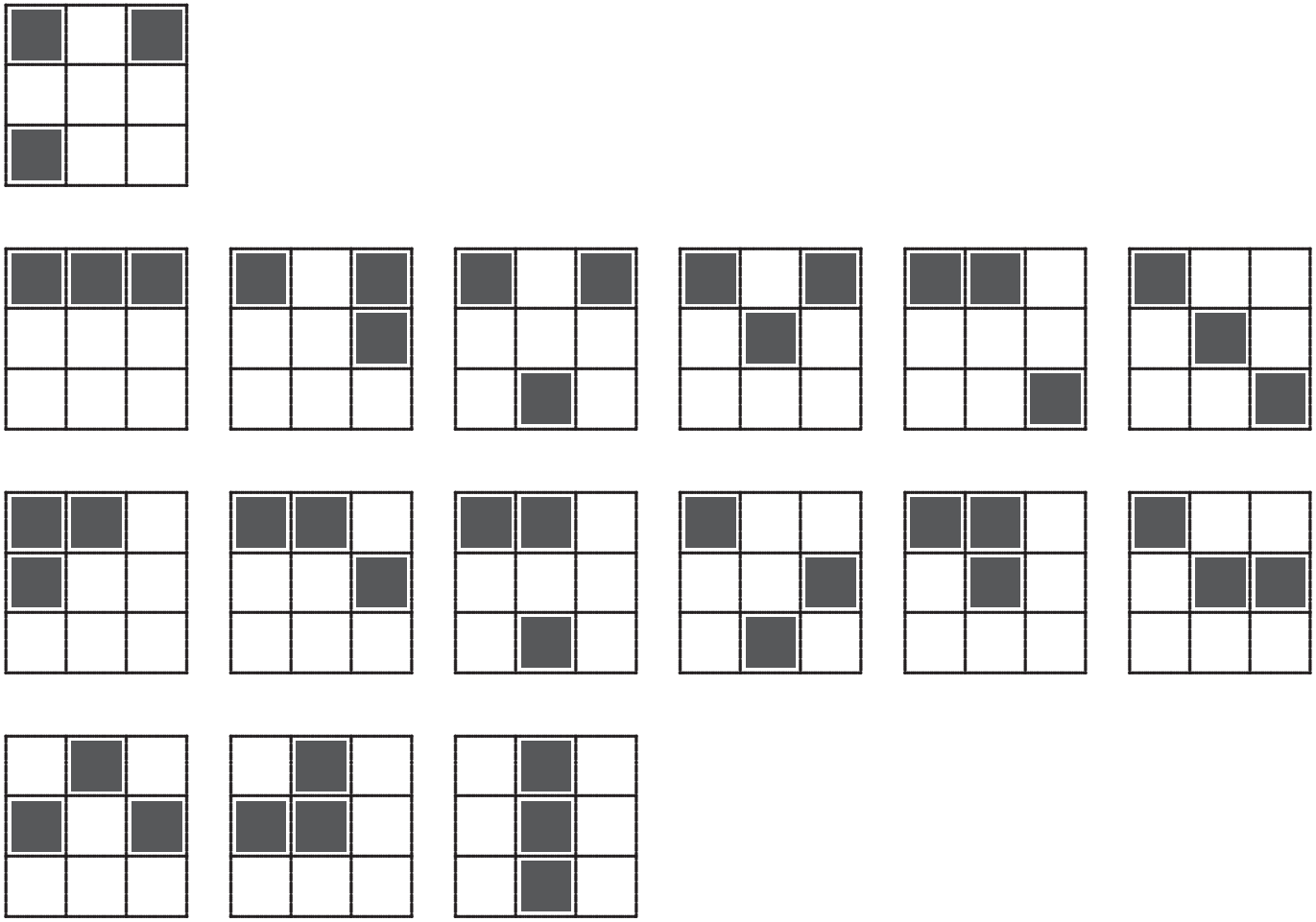
3 négyzet a sarokból

2 négyzet a sarokból

1 négyzet a sarokból

0 négyzet a sarokból

Összesen **16 lényegesen különböző satírozási minta** létezik.



3 négyzet a sarokból

2 négyzet a sarokból

1 négyzet a sarokból

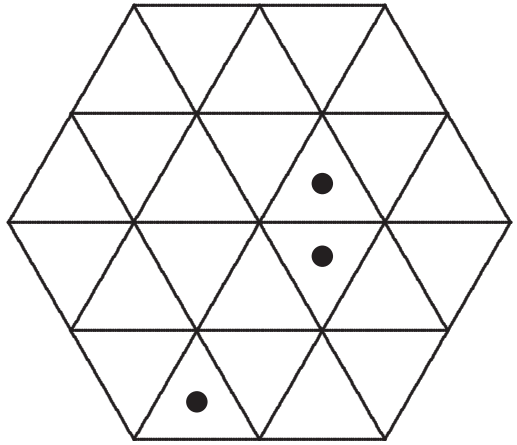
0 négyzet a sarokból

Összesen **16 lényegesen különböző satírozási minta** létezik.

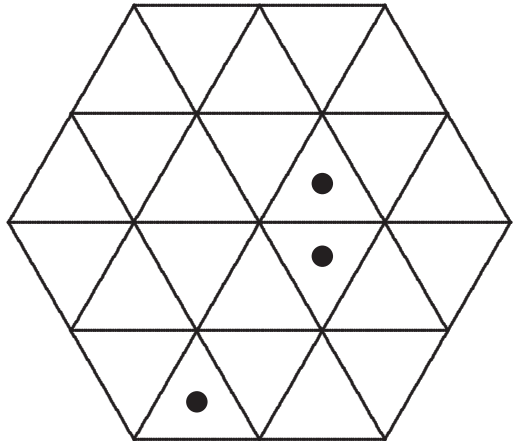
A tükrözötteket nem feltétlenül azonosítva **22 satírozási mintát** kapunk.

3. Feladat: Vegyünk egy szabályos hatszöget, kössük össze a középpontot a csúcsokkal, majd az így kapott hat szabályos háromszögbe rajzoljuk be a középvonalakat. Ily módon 24 szabályos kis háromszöget kapunk. Hányféleképpen tudunk kiválasztani és feketére satírozni három kis háromszöget, ha azonosnak tekintjük azokat a színezéseket, melyeket úgy kapunk egymásból, hogy a hatszöget elforgatjuk vagy tükrözzük?

3. Feladat: Vegyünk egy szabályos hatszöget, kössük össze a középpontot a csúcsokkal, majd az így kapott hat szabályos háromszögbe rajzoljuk be a középvonalakat. Ily módon 24 szabályos kis háromszöget kapunk. Hányféleképpen tudunk kiválasztani és feketére satírozni három kis háromszöget, ha azonosnak tekintjük azokat a színezéseket, melyeket úgy kapunk egymásból, hogy a hatszöget elforgatjuk vagy tükrözzük?



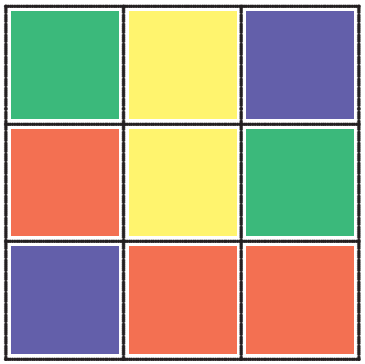
3. Feladat: Vegyünk egy szabályos hatszöget, kössük össze a középpontot a csúcsokkal, majd az így kapott hat szabályos háromszögbe rajzoljuk be a középvonalakat. Ily módon 24 szabályos kis háromszöget kapunk. Hányféleképpen tudunk kiválasztani és feketére satírozni három kis háromszöget, ha azonosnak tekintjük azokat a színezéseket, melyeket úgy kapunk egymásból, hogy a hatszöget elforgatjuk vagy tükrözzük?



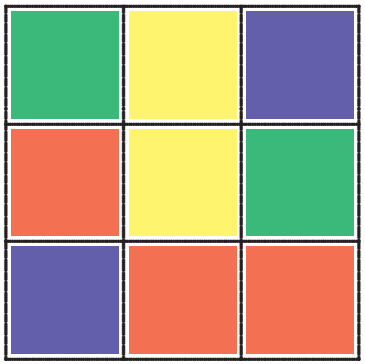
REMÉNYTELEN!

4. Feladat: Hányféleképpen tudjuk (legfeljebb) öt színnel kiszínezni egy 3×3-as négyzetháló (táblázat) kis négyzeteit, ha azonosaknak tekintjük azokat a színezéseket, amelyeket forgatással és/vagy tükrözéssel megkaphatunk egymásból?

4. Feladat: Hányféleképpen tudjuk (legfeljebb) öt színnel kiszínezni egy 3×3-as négyzetháló (táblázat) kis négyzeteit, ha azonosaknak tekintjük azokat a színezéseket, amelyeket forgatással és/vagy tükrözéssel megkaphatunk egymásból?



4. Feladat: Hányféleképpen tudjuk (legfeljebb) öt színnel kiszínezni egy 3×3-as négyzetháló (táblázat) kis négyzeteit, ha azonosaknak tekintjük azokat a színezéseket, amelyeket forgatással és/vagy tükrözéssel megkaphatunk egymásból?



HA LEHET, MÉG NEHEZEBB!?!

Burnside-lemma: *Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. Ekkor a G-hatás pályáinak a száma megegyezik a csoportelemek fixpontjai számának átlagával:*

$$\textit{pályák száma } = |\{G(x) \,|\, x \in X\}| = \frac{\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|}{|G|}$$

Burnside-lemma: *Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. Ekkor a G-hatás pályáinak a száma megegyezik a csoportelemek fixpontjai számának átlagával:*

$$\textit{pályák száma } = |\{G(x) \,|\, x \in X\}| = \frac{\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|}{|G|}$$

A lemma állítását ismerte már **Frobenius** és **Cauchy** is.

Burnside-lemma: *Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. Ekkor a G-hatás pályáinak a száma megegyezik a csoportelemek fixpontjai számának átlagával:*

$$\textit{pályák száma } = |\{G(x) \,|\, x \in X\}| = \frac{\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|}{|G|}$$

A lemma állítását ismerte már **Frobenius** és **Cauchy** is.

Csoport: (jelen esetben) egybevágóságoknak olyan G véges halmaza, melyre teljesül, hogy ha két elem G-ben van, akkor az egymás utáni alkalmazásukkal kapott egybevágóság is G-ben van

Pálya: egy adott $x \in X$ objektummal (pl. ültetéssel, színezéssel) azonosnak tekintett objektumok halmaza („minta”)

Fixpont: olyan objektum, melyet az egybevágóság nem változtat meg („szimmetrikus” az egybevágóságra nézve)

Burnside-lemma: *Tegyük föl, hogy a G csoport hat az X halmazon. Ekkor a G-hatás pályáinak a száma megegyezik a csoportelemek fixpontjai számának átlagával:*

$$\textit{pályák száma } = |\{G(x) \,|\, x \in X\}| = \frac{\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|}{|G|}$$

A lemma állítását ismerte már **Frobenius** és **Cauchy** is.

Csoport: (jelen esetben) egybevágóságoknak olyan G véges halmaza, melyre teljesül, hogy ha két elem G-ben van, akkor az egymás utáni alkalmazásukkal kapott egybevágóság is G-ben van

Pálya: egy adott $x \in X$ objektummal (pl. ültetéssel, színezéssel) azonosnak tekintett objektumok halmaza („minta”)

Fixpont: olyan objektum, melyet az egybevágóság nem változtat meg („szimmetrikus” az egybevágóságra nézve)

A lemma átfogalmazva:

Minták száma = szimmetrikus objetumok számának átlaga

Az 1. feladat (kerekasztal) esete:

Az 1. feladat (kerekasztal) esete:

9 forgatás $(1,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_8)$ és 9 tükrözés $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_4)$

Az 1. feladat (kerekasztal) esete:

9 forgatás $(1, f_1, f_2, \ldots, f_8)$ és 9 tükrözés $(t_1, t_2, \ldots, t_4)$

1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\ldots$	t_1	t_2	t_3	t_4	$\ldots$
84	0	0	3	0	0	3		4	4	4	4	

Az 1. feladat (kerekasztal) esete:

9 forgatás $(1, f_1, f_2, \ldots, f_8)$ és 9 tükrözés $(t_1, t_2, \ldots, t_4)$

1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\ldots$	t_1	t_2	t_3	t_4	$\ldots$
84	0	0	3	0	0	3		4	4	4	4	

Ez összesen $84 + 3 + 3 + 9 \cdot 4 = 126$ fixpontot jelent.

Ennek az átlaga $\frac{126}{18} = \mathbf{7}$.

Az 1. feladat (kerekasztal) esete:

9 forgatás $(1, f_1, f_2, \ldots, f_8)$ és 9 tükrözés $(t_1, t_2, \ldots, t_4)$

1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\ldots$	t_1	t_2	t_3	t_4	$\ldots$
84	0	0	3	0	0	3		4	4	4	4	

Ez összesen $84 + 3 + 3 + 9 \cdot 4 = 126$ fixpontot jelent.

Ennek az átlaga $\frac{126}{18} = \mathbf{7}$.

Ha csak forgatásokat engedünk meg: a fixpontok számának átlaga $\frac{84+3+3}{9} = \mathbf{10}$.

A 2. feladat (3×3-as táblázat satírozásainak) esete:

A 2. feladat (3×3-as táblázat satírozásainak) esete:

4 forgatás (1, f_1, f_2, f_3) és 4 tükrözés (t_1, t_2, t_3 és t_4)

A 2. feladat (3×3-as táblázat satírozásainak) esete:

4 forgatás (1, f_1, f_2, f_3) és 4 tükrözés (t_1, t_2, t_3 és t_4)

1	f_1	f_2	f_3	t_1	t_2	t_3	t_4
84	0	4	0	10	10	10	10

A 2. feladat (3×3-as táblázat satírozásainak) esete:

4 forgatás (1, f_1, f_2, f_3) és 4 tükrözés (t_1, t_2, t_3 és t_4)

1	f_1	f_2	f_3	t_1	t_2	t_3	t_4
84	0	4	0	10	10	10	10

Ez összesen $84 + 4 + 10 + 10 + 10 + 10 = 128$ fixpontot jelent.

Ennek az átlaga $\frac{128}{8} = \mathbf{16}$.

A 2. feladat (3×3-as táblázat satírozásainak) esete:

4 forgatás (1, f_1, f_2, f_3) és 4 tükrözés (t_1, t_2, t_3 és t_4)

1	f_1	f_2	f_3	t_1	t_2	t_3	t_4
84	0	4	0	10	10	10	10

Ez összesen $84 + 4 + 10 + 10 + 10 + 10 = 128$ fixpontot jelent.

Ennek az átlaga $\frac{128}{8} = \mathbf{16}$.

Ha csak forgatásokat engedünk meg: a fixpontok számának átlaga $\frac{84+4}{4} = \mathbf{22}$.

A 3. feladat (hatszög) esete:

A 3. feladat (hatszög) esete:

6 forgatás (1, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) és 6 tükrözés (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 és t_6)

A tükrözések közül a három utolsó megy át oldalközépponton.

A 3. feladat (hatszög) esete:

6 forgatás (1, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) és 6 tükrözés (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 és t_6)

A tükrözések közül a három utolsó megy át oldalközépponton.

1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
2024	0	8	0	8	0	0	0	0	44	44	44

A 3. feladat (hatszög) esete:

6 forgatás (1, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) és 6 tükrözés (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 és t_6)

A tükrözések közül a három utolsó megy át oldalközépponton.

1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
2024	0	8	0	8	0	0	0	0	44	44	44

Összesen 2172 fixpont. A fixpontok számának átlaga **181**.

A 3. feladatban a **satírozási minták száma** $\frac{2172}{12} = \mathbf{181}$.

A 3. feladat (hatszög) esete:

6 forgatás (1, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) és 6 tükrözés (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 és t_6)

A tükrözések közül a három utolsó megy át oldalközépponton.

1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
2024	0	8	0	8	0	0	0	0	44	44	44

Összesen 2172 fixpont. A fixpontok számának átlaga **181**.

A 3. feladatban a **satírozási minták száma** $\frac{2172}{12} = \mathbf{181}$.

Ha tükrözéssel kapott konfigurációkat nem feltétlenül tekintjük azonosnak:

a satírozási minták száma $\frac{2040}{6} = \mathbf{340}$**.**

A 4. feladat (3×3-as táblázat színezéseinek) esete:

A 4. feladat (3×3-as táblázat színezéseinek) esete:

4 forgatás (1, f_1, f_2, f_3) és 4 tükrözés (t_1, t_2, t_3 és t_4)

A 4. feladat (3×3-as táblázat színezéseinek) esete:

4 forgatás (1, f_1, f_2, f_3) és 4 tükrözés (t_1, t_2, t_3 és t_4)

1	f_1	f_2	f_3	t_1	t_2	t_3	t_4
5^9	5^3	5^5	5^3	5^6	5^6	5^6	5^6

A 4. feladat (3×3-as táblázat színezéseinek) esete:

4 forgatás (1, f_1, f_2, f_3) és 4 tükrözés (t_1, t_2, t_3 és t_4)

1	f_1	f_2	f_3	t_1	t_2	t_3	t_4
5^9	5^3	5^5	5^3	5^6	5^6	5^6	5^6

Ez összesen $5^9 + 2 \cdot 5^3 + 5^5 + 4 \cdot 5^6 = 2\,019\,000$ fixpontot jelent.

Ennek az átlaga $\frac{2\,019\,000}{8} = 252\,375$.

A színezési minták száma tehát 252 375.

A 4. feladat (3×3-as táblázat színezéseinek) esete:

4 forgatás (1, f_1, f_2, f_3) és 4 tükrözés (t_1, t_2, t_3 és t_4)

1	f_1	f_2	f_3	t_1	t_2	t_3	t_4
5^9	5^3	5^5	5^3	5^6	5^6	5^6	5^6

Ez összesen $5^9 + 2 \cdot 5^3 + 5^5 + 4 \cdot 5^6 = 2\,019\,000$ fixpontot jelent.

Ennek az átlaga $\frac{2\,019\,000}{8} = 252\,375$.

A színezési minták száma tehát 252 375.

Ha csak forgatásokat engedünk meg: az átlag $\frac{5^9+2\cdot5^3+5^5}{4} = 489\,125$.

Ebben az esetben **a színezési minták száma 489 125.**

Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)? (A 4. feladat esete)

Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

(A 4. feladat esete)

0°-os forgatás:

minden színezés változatlan marad **5^9 lehetséges színezés**

Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

(A 4. feladat esete)

0°-os forgatás:

minden színezés változatlan marad — **5^9 lehetséges színezés**

90°-os (270°-os) forgatás:

három négyzet színe mindent meghatároz: — **5^3 lehetséges színezés**

Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

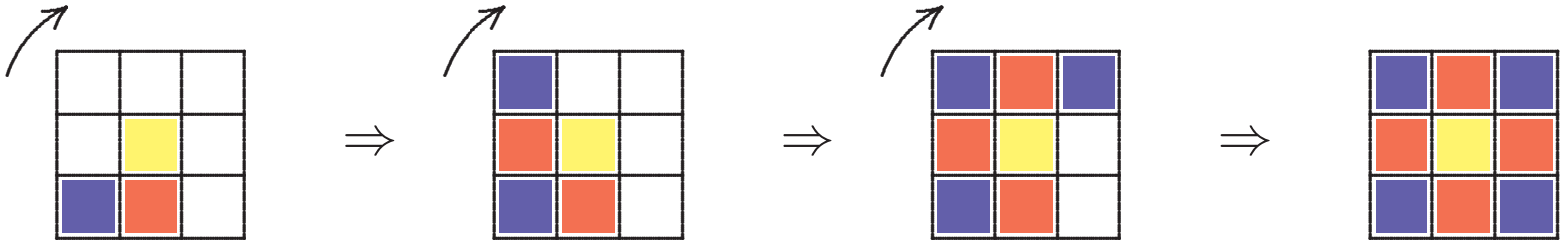
(A 4. feladat esete)

0°-os forgatás:

minden színezés változatlan marad — **5^9 lehetséges színezés**

90°-os (270°-os) forgatás:

három négyzet színe mindent meghatároz: — **5^3 lehetséges színezés**



Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

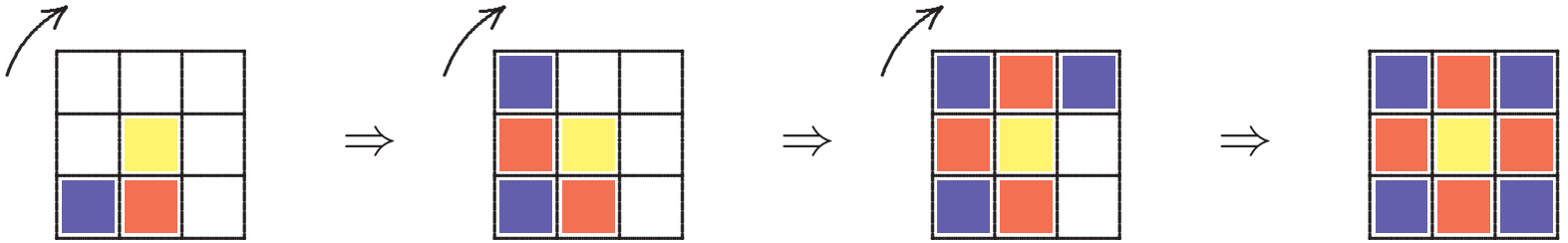
(A 4. feladat esete)

0°-os forgatás:

minden színezés változatlan marad **5^9 lehetséges színezés**

90°-os (270°-os) forgatás:

három négyzet színe mindent meghatároz: **5^3 lehetséges színezés**



180°-os forgatás:

öt négyzet színe mindent meghatároz: **5^5 lehetséges színezés**

Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

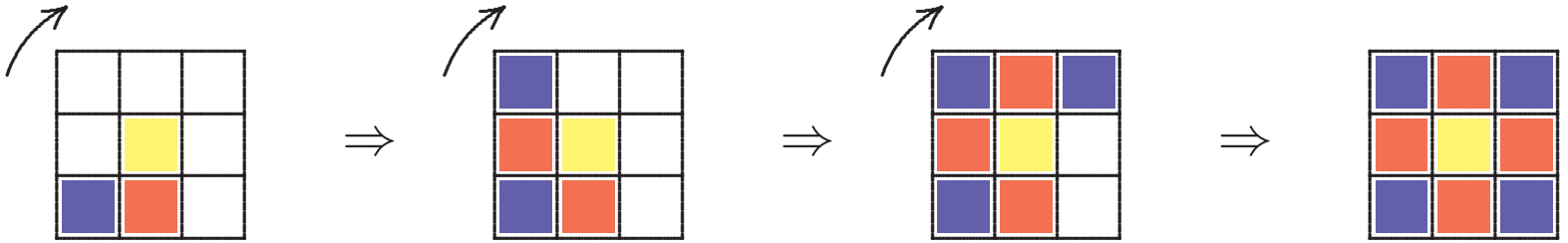
(A 4. feladat esete)

0°-os forgatás:

minden színezés változatlan marad **5^9 lehetséges színezés**

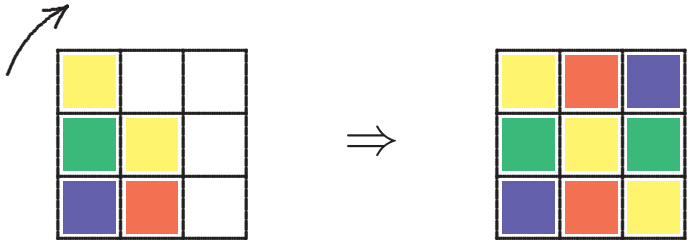
90°-os (270°-os) forgatás:

három négyzet színe mindent meghatároz: **5^3 lehetséges színezés**



180°-os forgatás:

öt négyzet színe mindent meghatároz: **5^5 lehetséges színezés**



Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

(A 4. feladat esete – folytatás)

Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

(A 4. feladat esete – folytatás)

Oldalközépponton átmenő szimmetriatengelyre való tükrözés:

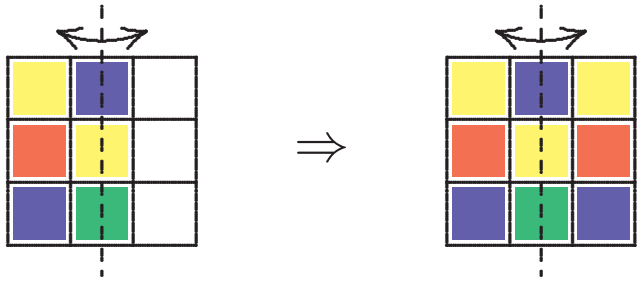
hat négyzet színe mindent meghatároz: **5^6 lehetséges színezés**

Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

(A 4. feladat esete – folytatás)

Oldalközépponton átmenő szimmetriatengelyre való tükrözés:

hat négyzet színe mindent meghatároz: **5^6 lehetséges színezés**

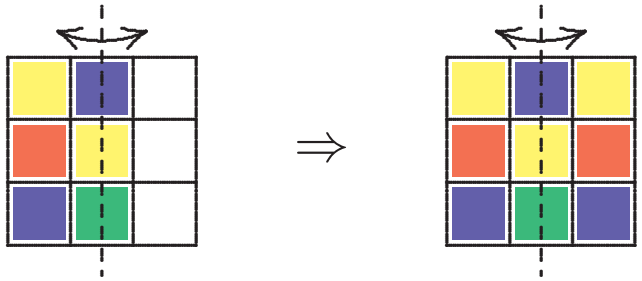


Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

(A 4. feladat esete – folytatás)

Oldalközépponton átmenő szimmetriatengelyre való tükrözés:

hat négyzet színe mindent meghatároz: **5^6 lehetséges színezés**



Két csúcson átmenő szimmetriatengelyre való tükrözés:

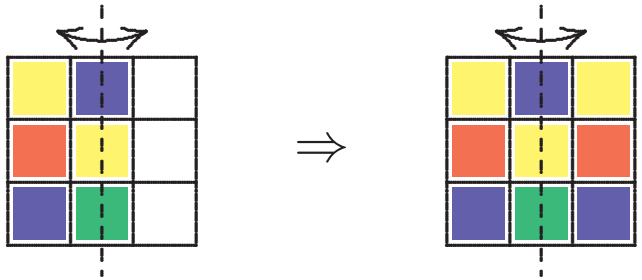
hat négyzet színe mindent meghatároz: **5^6 lehetséges színezés**

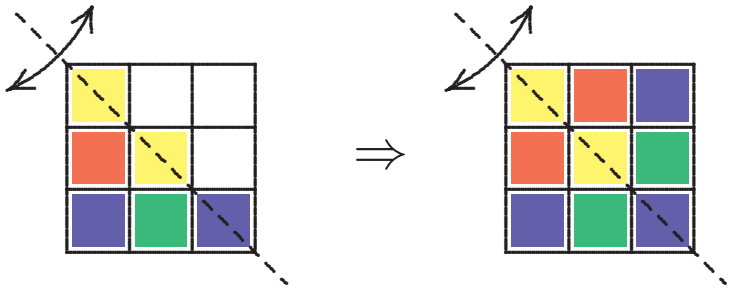
Hogyan számoljuk meg a szimmetrikus objektumokat (fixpontokat)?

(A 4. feladat esete – folytatás)

Oldalközépponton átmenő szimmetriatengelyre való tükrözés:

hat négyzet színe mindent meghatároz: **5^6 lehetséges színezés**



Két csúcson átmenő szimmetriatengelyre való tükrözés:

hat négyzet színe mindent meghatároz: **5^6 lehetséges színezés**